МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета
химической технологии и биотехнологии

________________ / С.В. Белуков /

« 31 » августа 2020 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Математические методы моделирования физических процессов»

Направление подготовки
16.03.03 Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения

Образовательная программа (профиль)
«Холодильная техника и технологии»

Квалификация (степень) выпускника:
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Москва 2020

1. Цели освоения дисциплины

К **основным целям** освоения дисциплины «Математические методы моделирования физических процессов» следует отнести:

- воспитание у студентов общей математической культуры;
- приобретение студентами широкого круга математических знаний, умений и навыков;
- развитие способности студентов к индуктивному и дедуктивному мышлению наряду с развитием математической интуиции;
- умение студентами развивать навыки самостоятельного изучения учебной и научной литературы, содержащей математические сведения и результаты;
- - формирование у студента требуемого набора компетенций, соответствующих его направлению подготовки и обеспечивающих его конкурентоспособность на рынке труда.

К **основным задачам** освоения дисциплины «Математические методы моделирования физических процессов» следует отнести:

- освоение студентами основных понятий, методов, формирующих общую математическую подготовку, необходимую для успешного решения важных для практических приложений задач оптимизации;
- подготовку студентов к деятельности в соответствии с квалификационной характеристикой бакалавра по направлению, в том числе формирование умений использовать освоенные математические методы в профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Математические методы моделирования физических процессов» относится к вариативной части блока Б1. Ее изучение обеспечивает изучение дисциплин:

- высшая математика;
- физика;
- механика жидкости и газа;
- теоретическая механика;
- термодинамика;
- тепломассообмен.

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции и должны быть достигнуты следующие результаты обучения как этап формирования соответствующих компетенций:

Код компетенции	В результате освоения образовательной программы обучающийся должен обладать	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ПК-1	способностью выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их анализа соответствующий физико-математический аппарат	**знать:** • математические методы в объеме, достаточном для грамотного анализа физических явлений и процессов и корректной формализации и решения профессиональных задач **уметь:** • выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их анализа соответствующий физико-математический аппарат **владеть:** • методами математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для решения проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности
ПК-2	готовностью применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности	**Знать:** методы математического моделирования, постановки и решения задач математической физики **уметь:** применять необходимый математический аппарат, методы математического и компьютерного моделирования для решения проблем, возникающих в процессе профессиональной деятельности **владеть:** теоретическими, расчетным и экспериментальными методами для решения прикладных задач с использованием методов математического моделирования

4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, т.е. **144** академических часа (из них **36** часа – самостоятельная работа студентов).

Дисциплина «Математические методы моделирования физических процессов» изучается в 4 семестре. При этом на лекции выделяется **18** часов, на практические занятия – **18** часов, форма контроля - зачет.

Структура и содержание дисциплины «Математические методы моделирования физических процессов» по срокам и видам работы отражены в Приложении.

Содержание разделов дисциплины

Введение

Предмет, задачи и содержание дисциплины. Основные этапы развития дисциплины. Структура курса, его место и роль в подготовке специалиста, связь с другими дисциплинами. Понятие математической модели, их классификация.

Основные принципы математического моделирования. Необходимый математический аппарат – дифференциальные уравнения математической физики.

Раздел 1. Гармонический анализ.

Тема 1. Постановка основной задачи гармонического анализа. Ортогональность тригонометрических функций. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $T = 2\pi$. Формулы коэффициентов Фурье. Условия Дирихле. Теорема о разложимости периодических функций в ряд Фурье. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Особенности разложения непериодических функций, понятие их периодического продолжения. Применение рядов Фурье для решения краевых задач.

Тема 2. Обобщённый ряд Фурье. Ортонормированные системы функций. Получение системы ортогональных базисных функций с помощью задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения математической физики

Тема 1. Основные понятия и определения. Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. Основные уравнения математической физики. Постановка краевых и начально-краевых задач для них, их физический смысл.

Тема 2. Вывод волнового уравнения. Решение однородного гиперболического уравнения с однородными граничными условиями методом разделения переменных. Задачи о малых свободных колебаниях струны, о продольных колебаниях стержня.

Тема 3. Решение неоднородного гиперболического уравнения с однородными граничными условиями методом разложения по собственным функциям однородной задачи. Задача о вынужденных колебаниях струны при отсутствии начальных возмущений и при неоднородных начальных условиях. Редукция общей начально-краевой задачи для неоднородного гиперболического уравнения к задаче с однородными граничными условиями.

Тема 4. Решение однородного волнового уравнения в круговой области. Уравнение и функции Бесселя. Осесимметричные колебания круговой мембраны.

Тема 5. Решения начально-краевых задач для однородного и неоднородного параболического уравнения с однородными и неоднородными граничными условиями.

Тема 6. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Решение неоднородного эллиптического уравнения с однородными граничными условиями. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области в двойных тригонометрических рядах Фурье.

Тема 7. Решение задачи Дирихле для уравнения неоднородного уравнения Лапласа и бигармонического уравнения в прямоугольной области в двойных тригонометрических рядах Фурье.

Тема 8. Основные понятия вариационного исчисления и применение прямых вариационных методов к решению задач математической физики. Методы Рэлея-Ритца и Бубнова - Галеркина. Применение к задачам механики.

Тема 9. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины

Методика преподавания дисциплины «Математические методы моделирования физических процессов» и реализация компетентностного подхода в изложении и восприятии материала предусматривают использование следующих активных и интерактивных форм проведения групповых, индивидуальных, аудиторных занятий в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся:

– защита и индивидуальное обсуждение выполняемых этапов расчетно-графических работ;

- привлечение лучших студентов к консультированию отстающих.

– подготовка, представление и обсуждение презентаций на семинарских занятиях;

– организация и проведение текущего контроля знаний студентов в форме бланкового тестирования;

– проведение интерактивных занятий по процедуре подготовки к интернет-тестированию на сайтах: *i-exam.ru, fepo.ru;*

– использование интерактивных форм текущего контроля в форме аудиторного и внеаудиторного интернет-тестирования;

итоговый контроль состоит в устном экзамене по математике с учетом результатов выполнения самостоятельных работ.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определен главной целью образовательной программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием дисциплины «Математические методы моделирования физических процессов» и в целом по дисциплине составляет 50% аудиторных занятий. Занятия лекционного типа составляют 50 % от объема аудиторных занятий.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

В процессе обучения используются следующие оценочные формы самостоятельной работы студентов, оценочные средства текущего контроля успеваемости и промежуточных аттестаций:

- одна расчетно-графическая работа.

- две самостоятельных (контрольных) работы в аудитории.

Расчетно-графическая работа № 1. Часть 1. Ряды Фурье. Применение рядов Фурье к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Её краткое содержание:

разложение в ряд Фурье непериодической функции на отрезке $[-l, l]$; применение рядов Фурье для решения изгиба стержней с различными граничными условиями; разложение в обобщённый ряд Фурье функции на отрезке $[-l, l]$; нахождение собственных функций параболического, гиперболического или эллиптического уравнения.

Расчетно-графическая работа № 1. Часть 2. Решение уравнений математической физики.

Её краткое содержание:

Построение решения в виде обобщённого ряда Фурье либо однородного параболического или гиперболического уравнения с однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями, либо неоднородного параболического или гиперболического уравнения с однородными граничными условиями и начальными условиями, либо неоднородного эллиптического уравнения с однородными граничными условиями.

Оценочные средства текущего контроля успеваемости включают контрольные вопросы и задания в форме бланкового тестирования для контроля освоения обучающимися разделов дисциплины, прием РГР.

Образцы тестовых заданий, заданий РГР, контрольных вопросов и заданий для проведения текущего контроля, экзаменационных билетов приведены в Приложении 2.

6.1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Математические методы моделирования физических процессов»

6.1.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

В результате освоения дисциплины формируются следующие компетенции

Код компетенции	В результате освоения образовательной программы обучающийся должен обладать
ПК-1	способностью выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их анализа соответствующий физико-математический аппарат
ПК-2	готовностью применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности

В процессе освоения образовательной программы данные компетенции, в том числе их отдельные компоненты, формируются поэтапно в ходе освоения обучающимися дисциплины в соответствии с учебным планом и календарным графиком учебного процесса.

6.1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, формируемых по итогам освоения дисциплины, описание шкал оценивания

Показателем оценивания компетенций на различных этапах их формирования является достижение обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине.

ПК-1 – способность выявлять сущность научно-технических проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их анализа соответствующий физико-математический аппарат				
Показатель	**Критерии оценивания**			
	2	**3**	**4**	**5**
знать: основополагающие теоретические положения, методы, предусмотренные программой дисциплины, позволяющие в совокупности адекватно представлять современную научную картину мира	Обучающийся демонстрирует полное отсутствие или недостаточное соответствие знаний контролируемых разделов математики: не способен аргументированно и последовательно излагать материал, неправильно отвечает на дополнительные вопросы или затрудняется с ответом	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие знаний программе: допускаются ошибки, проявляется недостаточное, поверхностное знание теории, сути методов. Для получения правильного ответа требуются уточняющие вопросы.	Обучающийся демонстрирует достаточно глубокие знания контролируемых разделов дисциплины, отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные. В то же время при ответе допускает несущественные погрешности или дает недостаточно полные ответы	Обучающийся демонстрирует полное соответствие знаний программе дисциплины, логично и аргументированно отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные, показывает высокий уровень теоретической подготовки
уметь: использовать постановки задач и методы математической физики исчисления для решения прикладных задач	Обучающийся показывает недостаточное умение применять теорию к решению предлагаемых задач, допускает грубые ошибки при решении задач или вообще решения задач отсутствуют, неправильно отвечает на дополнительные вопросы, связанные с изучавшимися в курсе математическими методами и моделями или затрудняется с ответом	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие следующих умений: решение задач, умение пользоваться методами математической физики. В решении задач могут содержаться грубые ошибки, проявляется недостаточное умение применять теорию к решению предлагаемых задач.	Обучающийся демонстрирует частичное соответствие следующих умений: применять теоретические методы к решению задач. Умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при решении задач, не влияющие на общий ход решения	Обучающийся демонстрирует умение применять теорию к решению предлагаемых задач, правильно и полно строить решения математических задач. Свободно оперирует приобретенными умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности.
Владеть: на основе зна-	Обучающийся не владеет или в совершенно недостаточной	Обучающийся владеет математическими мето-	Обучающийся частично владеет методами матема-	Обучающийся в полном объеме

ния основных методов математической физики методикой их применения для решения задач, возникающих в процессе профессиональной деятельности	степени владеет навыками применения теоретического аппарата и различных математических методов к решению задач	дами в неполном объеме, допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения математической техникой, испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.	тической физики, навыки освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	владеет методами математического моделирования физических процессов , свободно применяет полученные навыки в ситуациях повышенной сложности.
ПК-2 способность применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности				
знать: теорию, постановки и методы решения задач математической физики	Обучающийся демонстрирует полное отсутствие или недостаточное соответствие знаний контролируемых разделов математики: не способен аргументированно и последовательно излагать материал, неправильно отвечает на дополнительные вопросы или затрудняется с ответом	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие знаний программе, допускаются ошибки, проявляется недостаточное, поверхностное знание теории, сути методов. Для получения правильного ответа требуются уточняющие вопросы.	Обучающийся демонстрирует достаточно глубокие знания контролируемых разделов дисциплины, отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные. В то же время при ответе допускает несущественные погрешности или дает недостаточно полные ответы	Обучающийся демонстрирует полное соответствие знаний программе дисциплины, логично и аргументированно отвечает на все вопросы, в том числе дополнительные, показывает высокий уровень теоретической подготовки
уметь: применять математический аппарат математической физики, методы математического и компьютерного моделирования для решения проблем, возникающих в области прикладной механики	Обучающийся показывает недостаточное умение применять теорию к решению предлагаемых задач, допускает грубые ошибки при решении задач или вообще решения задач отсутствуют, неправильно отвечает на дополнительные вопросы, связанные с изучавшимися в курсе математическими методами и моделями или затрудняется с ответом	Обучающийся демонстрирует неполное соответствие следующих умений: решение задач, умение пользоваться методами математической физики. В решении задач могут содержаться грубые ошибки, проявляется недостаточное умение применять теорию к решению предлагаемых задач.	Обучающийся демонстрирует частичное соответствие следующих умений: применять теоретические методы к решению задач. Умения освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при решении задач, не влияющие на общий ход решения	Обучающийся демонстрирует умение применять теорию к решению предлагаемых задач, правильно и полно строить решения математических задач. Свободно оперирует приобретенными умениями, применяет их в ситуациях повышенной сложности
владеть: методами математической физики для эффективного решения прикладных задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Обучающийся не владеет или в совершенно недостаточной степени владеет навыками применения теоретического аппарата и различных математических методов к решению задач	Обучающийся владеет математическими методами в неполном объеме, допускаются значительные ошибки, проявляется недостаточность владения математической техникой, испытывает значительные затруднения при применении навыков в новых ситуациях.	Обучающийся частично владеет методами математической физики, навыки освоены, но допускаются незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе умений на новые, нестандартные ситуации.	Обучающийся в полном объеме владеет методами математической физики, свободно применяет полученные навыки в ситуациях повышенной сложности.

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и её описание:

Форма промежуточной аттестации: зачет.

Промежуточная аттестация обучающихся в форме зачета проводится по результатам выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных учебным планом по данной дисциплине, при этом учитываются результаты текущего контроля успеваемости в течение семестра. Оценка степени достижения обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине проводится преподавателем, ведущим занятия по дисциплине методом экспертной оценки. По итогам промежуточной аттестации по дисциплине выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено».

Шкала оценивания	**Описание**
Зачтено	Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, *предусмотренные программой дисциплины.* Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателям, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
Не зачтено	Не выполнены **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, *предусмотренные программой дисциплины*, ИЛИ студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателям, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при оперировании знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

Фонды оценочных средств представлены в приложении 2 к рабочей программе.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Щербатых, В. Е. Ряды Фурье : учебное пособие / В. Е. Щербатых. — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. — 104 с. — ISBN 978-5-00151-130-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/331829 (дата обращения: 18.09.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

в) программное обеспечение и интернет-ресурсы:

Программное обеспечение не предусмотрено.

Интернет-ресурсы включают учебно-методические материалы в электронном виде, представленные на сайте mospolytech.ru в разделе: «Центр математического образования» (*http://mospolytech.ru/index.php?id=4486*);

Варианты контрольных заданий по дисциплине представлены на сайтах: *http://i-exam.ru, http:// fepo.ru*.

Полезные учебно-методические и информационные материалы представлены на сайтах:

http://exponenta.ru,

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/mathwebs.htm.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Материально – техническая база университета обеспечивает проведение всех видов занятий, предусмотренных учебным планом и соответствует действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Для проведения учебных занятий используются:

- лекционные аудитории и аудитории для проведения практических занятий, в том числе, оснащенные мультимедийным оборудованием для проведения аудиторных занятий (проектор, ноутбук, микрофон и т.д.);
- для работы со специализированным программным обеспечением во время интерактивных практических занятий имеются компьютерные классы университета.

9. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов

Раздел математики, посвященный математическому моделированию физических процессов и базирующийся на уравнениях математической физики, является чрезвычайно важным для приложений, так как большинство физических процессов различной природы моделируется именно линейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

При изучении уравнений математической физики следует, прежде всего, обратить внимание на классификацию уравнений. Всё многообразие уравнений математической физики может быть разделено на три класса. Уравнения каждого класса обладают общими свойствами решений. В каждом из этих классов есть простейшее уравнение, называемое *каноническим*. Принадлежность уравнения к тому или иному классу определяется соотношением между коэффициентами при старших производных.

Особое внимание надо обратить на постановки начально-краевых задач для уравнений гиперболического, параболического типов и краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Любое дифференциальное уравнение математической физики имеет бесчисленное множество решений. Для получения единственного решения необходимо задание дополнительных условий, которые позволяют однозначно описать конкретный физический процесс. Количество и вид этих условий зависят от характера и порядка производных, входящих в уравнение, от формы области, в которой ищется решение уравнения, от характера взаимодействия рассматриваемого тела (или процесса в выделенном теле) с окружающей средой. В общем случае дополнительными условиями могут быть *начальные* и *граничные условия*.

Начальные условия описывают состояние объекта в начальный момент времени. Для уравнения гиперболического типа ставятся два начальных условия соответственно второму порядку производной по времени, входящей в уравнение. Они характеризуют величины отклонений и скоростей точек объекта (струны, стержня и др.) в начальный момент времени. Для уравнения параболического типа ставится одно начальное условие, что соответствует первому порядку производной по времени (если искомая функция в уравнении теплопроводности $u(x,t)$ – температура в произвольном сечении стержня в любой момент времени t, то начальным условием задаётся распределение температуры по длине стержня в начальный момент времени $t = 0$).

Граничные условия для волнового уравнения (если оно описывает, например, поперечные колебания струны конечных размеров) характеризуют поведение концов струны в процессе колебаний и зависят от характера их закрепления.

Для уравнения теплопроводности стержня граничные условия имеют существенно различный вид в зависимости от характера теплообмена концов стержня с окружающей средой.

Для уравнения эллиптического типа, как и для уравнения параболического типа, также различают разные краевые задачи в зависимости от условий на контуре рассматриваемой области.

Поэтому постановка задачи математической физики включает задание дифференциального уравнения в частных производных, описывающего исследуемый процесс, а также в общем случае граничных и начальных условий, позволяющих получить единственное решение.

Если задача математической физики поставлена корректно, то её решение существует, единственно и устойчиво к малым изменениям исходных данных.

Требование непрерывной зависимости решения от исходных данных обусловлено тем, что физические данные, характеризующие начальное состояние системы, определяются, как правило, экспериментально, и всегда с некоторой погрешностью. Поэтому необходима уверенность в том, что малая погрешность в исходных данных будет приводить лишь к малой погрешности в решении, то есть решение задачи не должно существенно зависеть от погрешностей измерений.

Из-за ограниченности объема курса рассматриваются, в основном, метод разделения переменных Фурье и его модификация для решения неоднородных уравнений – метод разложения по собственным функциям однородной задачи. Студенту надо осмыслить идею метода разделения переменных – сведение задачи для дифференциального уравнения в частных производных к принципиально более простой задаче решения независимых друг от друга обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (причем важно, что разделение переменных происходит и в граничных условиях). Надо обратить внимание на единство подхода к решению уравнений различного типа. Так, при решении однородных уравнений методом разделения переменных и для гиперболических, и для параболических и для эллиптических уравнений на первом этапе решение сводится к задаче на собственные значения (задаче Штурма-Лиувилля).

При решении неоднородных уравнений методом разложения по собственным функциям также сначала решается однородная краевая задача, что позволяет найти собственные функции, удовлетворяющие граничным условиям. По ним далее и раскладываются в ряды искомые функции и правые части уравнений, что приводит (при решении волнового уравнения и уравнения теплопроводности) к задаче Коши для неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует также обратить внимание на то, что решение методом разделения переменных возможно не всегда, а во многих случаях приводит к так называемым специальным функциям, например, при решении уравнений математической физики в круговых областях.

Основные сведения из вариационного исчисления. Во многих случаях задачу интегрирования дифференциального уравнения при соответствующих краевых условиях можно заменить равносильной вариационной задачей отыскания функции, сообщающей экстремальное значение некоторому функционалу.

Например, при обычных краевых условиях можно свести интегрирование уравнений статической теории упругости к отысканию минимума потенциальной энергии деформации.

Следует, прежде всего, понять, что является предметов вариационного исчисления и его основные понятия.

Наряду с задачами исследования экстремумов функций на практике часто возникает необходимость отыскания максимальных и минимальных значений математических выражений более общего вида – так называемых функционалов.

Вариационное исчисление и является разделом математики, посвященным исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от одной или нескольких функций, при разного рода ограничениях, налагаемых на эти функции.

В настоящее время вариационные методы очень широко применяются в механике и физике.

Понятие функционала является обобщением понятия функции: если функция $y(x)$ - это зависимость числа от числа, то функционал $I[y(x)]$ - это зависимость числа от функции, он определен на множестве допустимых кривых.

Чтобы проследить изменение функционала при изменении аргумента вводится, прежде всего, понятие вариации функции - аргумента функционала.

Варьирование аргумента функционала означает переход от одной функции из класса допустимых для данного функционала к другой бесконечно близкой ей функции при том же значении x.

В этом состоит отличие варьирования от дифференцирования функций, которое, как известно, является мерой изменения одной и той же функции при изменении независимой переменной x.

Варьирование аргумента функционала δy аналогично приращению независимой переменной Δx при исследовании экстремумов функций.

Варьирование аргумента функционала – это новая математическая операция, перестановочная с операциями дифференцирования и интегрирования.

Аналогично, вариация функционала играет ту же роль при исследовании функционалов, что дифференциал функции при исследовании функций. Вариация функционала – это главная линейная часть приращения функционала.

При исследовании локального экстремума функционала выясняется, что необходимое условие экстремума функционала состоит в равенстве нулю его вариации $\delta I = 0$. Здесь опять проявляется аналогия с исследованием экстремумов функций. Действительно, необходимое условие экстремума функции в данной точке состоит в равенстве нулю производной функции в этой точке: $y'(x_0) = 0$.

Необходимо обязательно осмыслить и знать постановку и решение простейшей вариационной задачи – задачи с неподвижными границами, решение которой сводится к решению краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка – уравнения Эйлера, играющего фундаментальную роль в вариационном исчислении.

Вариационные задачи допускают их прямое решение, то есть приближенное решение, сводящее исходные уравнения непосредственно к конечным системам алгебраических уравнений. Такие методы и называются прямыми. Их применение связано с использованием общих вариационных принципов механики. В задачах механики деформируемого твердого тела прямые методы решения базируются на аппроксимации деформированного или напряженного состояния.

Наиболее универсальными и распространенными прямыми методами приближенного решения основной задачи вариационного исчисления – задачи отыскания экстремума функционалов являются метод Ритца и метод Бубнова – Галеркина. Они и сейчас (спустя более 100 лет после их появления) являются весьма распространенными «рабочими» методами механики.

Студент в процессе освоения курса должен овладеть знанием вариационных методов и принципов и уметь применять их к решению простейших типовых задач, относящихся к прикладной механике.

10. Методические рекомендации для преподавателя

Прежде всего, следует обратить внимание студентов на то, что практически весь изучаемый ими материал является для них новым, не изучавшимся ни в программе средней школы, ни в классических разделах высшей математики на первом курсе. Однако он вполне может быть успешно изучен, если студенты будут посещать занятия, своевременно выполнять домашние задания и пользоваться (при необходимости) системой плановых консультаций в течение каждого семестра.

Вошедшие в курс математического моделирования физических процессов уравнения математической физики практически имеют очень широкое распространение для решения разного рода естественнонаучных задач. Их освоение поможет студентам успешно применять накопленные знания в профессиональной деятельности.

Необходимо с самого начала занятий рекомендовать студентам основную и дополнительную литературу, а в конце семестра дать список вопросов для подготовки к экзамену.

На первом занятии по дисциплине обязательно проинформировать студентов о виде и форме промежуточной аттестации по дисциплине, сроках ёе проведения, условиях допуска к промежуточной аттестации, применяемых видах промежуточного контроля.

Соображения и рекомендации, приведенные в п. 9 рабочей программы для студентов, должны быть четко сформулированы и изложены именно преподавателем на лекциях, практических занятиях и консультациях.

Изложение теоретического материала должно сопровождаться иллюстративными примерами, тщательно отобранными преподавателем так, чтобы технические трудности и выкладки при решении задачи не отвлекали от главного: осмысления идеи и сути применяемых методов. Следует всегда указывать примеры практического применения рассмотренных на занятиях уравнений и формул.

Практические занятия должны быть организованы преподавателем таким образом, чтобы оставалось время на периодическое выполнение студентами небольшой самостоятельной работы в аудитории для проверки усвоения изложенного материала.

Преподаватель, ведущий практические занятия, должен согласовывать учебно – тематический план занятий с лектором, использовать единую систему обозначений.

Преподавателю следует добиваться систематической непрерывной работы студентов в течение семестра, необходимо выявлять сильных студентов и привлекать их к научной работе, к участию в разного рода олимпиадах и студенческих научно-технических конференциях и конкурсах.

Студент должен ощущать заинтересованность преподавателя в достижении конечного результата: в приобретении обучающимися прочных знаний, умений и владения накопленной информацией для решения задач в профессиональной деятельности.

7. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств представлен в Приложении 2 к рабочей программе и включает разделы:

1. Методы контроля и оценивания результатов обучения.
2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения.
3. Оценочные средства.
3.1. Текущий контроль.
3.2. Промежуточная аттестация.

Приложение 1

Тематический план дисциплины «Математические методы моделирования физических процессов»
по направлению подготовки
16.03.03 Холодильная криогенная техника и системы жизнеобеспечения
Образовательная программа (профиль)
«Холодильная криогенная техника и системы жизнеобеспечения»
(Бакалавр)
Очная форма обучения

n/n	Раздел	Семестр	Неделя Семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость в часах					Виды самостоятельной работы Студентов					Формы аттеста-ции	
				Л	П/С	Лаб	СРС	КСР	К.Р.	К.П.	РГР	Реферат	К/р	Э	З
Первый семестр															
Третий семестр															
3.1	**Тема 1.** Понятие математической модели, их классификация Основные понятия обыкновенных дифференциальных уравнений (о.д.у.) первого порядка. Задача Коши, теорема существования и единственности ее решения Понятия общего и частного решений, общего и частного интегралов. Геометрический смысл общего интеграла д.у 1-го порядка		1	2			2								
3.2	Методы интегрирования оду первого порядка различного типа (уравнений с разделенными и разделяющимися перемен-		2		2		2				+				

	ными, однородных) **<u>Выдача заданий первой части РГР *по о.д.у.*</u>**														
3.3	Линейные д.у. первого порядка и уравнения Бернулли Метод вариации произвольной постоянной, метод произведений Бернулли		3	2			2								
3.4	Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия. Постановка задачи Коши, краевой задачи.		4		2										
3.5	Интегрирование оду высших порядков методом понижения порядка		4	2			2								
3.6	Линейные однородные д.у. n –го порядка. Общие свойства решений. Теорема о структуре общего решения линейных однородных д.у. n –го порядка. Построение фундаментальной системы решений для уравнений с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения.		6		2		2								
3.7	Линейные неоднородные д.у. *n*-го порядка. Теорема о структуре общего решения. Метод подбора частного решения.		7	2			2								
3.8	Решение линейных неоднородных д.у. *n*-го порядка с постоянными коэффициентами методом подбора для различных специальных видов правой части		8		2		2								
3.9	Линейные неоднородные д.у. второго порядка с постоянными коэффициентами с произвольной непрерывной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных.		9	2			2								
3.10	Краевые задачи. Задачи на собственные		10		2		2						+		

	значения. **Контрольная работа по линейным д.у. n-го порядка**														
3.11	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные понятия. Решение нормальных систем линейных дифференциальных уравнений методом исключения неизвестных.		11	2			2								
3.12	Постановка основной задачи гармонического анализа. Ортогональность тригонометрических функций. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $T=2\pi$. Условия Дирихле. Теорема о разложимости периодических функций в ряд Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом. Особенности разложения непериодических функций		12		2		2								
3.13	Применение тригонометрических рядов Фурье к решению краевых задач для оду.		13	2			2								
3.14	**Раздел 2. Дифференциальные уравнения математической физики.** Классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. Основные уравнения математической физики. Постановка краевых и начально-краевых задач. **Выдача второй части РГР по уравнениям математической физики**		14		2		2				+				
3.15	Решение однородного волнового уравнения с однородными граничными усло-		15	2			2								

	виями методом разделения переменных на примере задачи о свободных малых колебаний струны. Физическое истолкование решения.														
3.16	Решение неоднородного гиперболического уравнения с однородными граничными условиями методом разложения по собственным функциям. Задача о вынужденных колебаниях струны при отсутствии начальных возмущений		16		2		2								
3.17	Постановка краевых задач для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области методом разделения переменных		17	2			2								
3.18	**Контрольное тестирование**		18		2		2						+		
	Форма аттестации		**19-21**												**З**
	Всего часов по дисциплине			**18**	**18**		**36**				**1 РГР**		**2 Кон-тр. раб.**		

Приложение 2

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«Математические методы моделирования физических процессов»

Направление подготовки: 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения».
Профиль: «Направленность (профиль) «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения».

Кафедра: «Математика».

1.Методы контроля и оценивания результатов обучения

Для контроля успеваемости и качества освоения дисциплины настоящей программой предусмотрены следующие виды контроля:
- контроль текущей успеваемости (текущий контроль);
- промежуточная аттестация (экзамен).

2. Шкала и критерии оценивания результатов обучения

Форма промежуточной аттестации: зачет

Промежуточная аттестация обучающихся в форме зачета проводится по результатам выполнения всех видов учебной работы, предусмотренных учебным планом по данной дисциплине, при этом учитываются результаты текущего контроля успеваемости в течение семестра. Оценка степени достижения обучающимися планируемых результатов обучения по дисциплине проводится преподавателем, ведущим занятия по дисциплине методом экспертной оценки. По итогам промежуточной аттестации по дисциплине выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено».

Шкала оценивания	Описание
Зачтено	Выполнены все **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, *предусмотренные программой дисциплины.* Студент демонстрирует соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателям, оперирует приобретенными знаниями, умениями, навыками, применяет их в ситуациях повышенной сложности. При этом могут быть допущены незначительные ошибки, неточности, затруднения при аналитических операциях, переносе знаний и умений на новые, нестандартные ситуации.
Не зачтено	Не выполнены **обязательные условия подготовки студента к промежуточной аттестации**, *предусмотренные программой дисциплины*, ИЛИ студент демонстрирует неполное соответствие знаний, умений, навыков приведенным в таблицах показателям, допускаются значительные ошибки, проявляется отсутствие знаний, умений, навыков по ряду показателей, студент испытывает значительные затруднения при оперировании

	знаниями и умениями при их переносе на новые ситуации.

3. Оценочные средства

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	Контрольная (самостоятельная) работа (КР)	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Контрольные задания
2	Расчетно-графическая работа (РГР)	Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения расчетно-графической работы
3	Устный опрос, собеседование, (УО)	Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
4	Тест (Т)	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося.	Вариант теста
5	Билеты к зачету (ЭБ)	Средство проверки знаний, умений, навыков. Может включать комплекс теоретических вопросов, задач, практических заданий.	Билеты к зачету

3.1.Текущий контроль

Оценочные средства текущего контроля успеваемости включают контрольные вопросы и задания в форме бланкового тестирования для контроля освоения обучающимися разделов дисциплины, прием РГР.

Содержание расчетно-графической работы по дифференциальным уравнениям.

Методы решений дифференциальных уравнений различного типа.

Вариант задания

Решить уравнения:

2. $\sqrt{4+y^2}\,\mathrm{dx}-\mathrm{ydy}=x^2\,\mathrm{ydy}$,

3. $2\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{y^2}{x^2}+\frac{8y}{x}+8$,

Решить задачи Коши для уравнений:

6. $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{2}{x^3}-\frac{3y}{x}$, $\quad y(1)=1$,

7. $4y' + x^3 y = (x^3+8) e^{-2x} y^2, \qquad y(0)=1.$

8. Решить уравнение: $\quad x^2 y''' + x y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

Решить уравнения:

10. $y'''' + y''' = x,$

11. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x+20)e^x,$

12. $y'' + 25y = 2\cos 5x - \sin 5x + e^{5x},$

13. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{(3+e^{-x})}.$

14. Решить краевую задачу: $\quad y'' + 2y' + 5y = -3\sin 2x, \quad y(0)=1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=0.$

15. Найти собственные значения λ и собственные функции y задачи:
$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0)=0, \quad y'(b) = y(b).$

Решить системы уравнений:

19. $\{ z' = y - z,$ $\qquad$ 20. $\{ y' = 4y - 3z + \sin x,$

Контрольная работа №1
по обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка

Решить уравнения

Вариант 1

1) $x y' = \mathrm{xe}^{-y/x} + y$
2) $x^2 \mathrm{dy} - (2\,\mathrm{xy} + 3)\mathrm{dx} = 0$
3) $(1 + y^2 \sin 2x)\mathrm{dx} - y\cos 2x\mathrm{dy} = 0$

Вариант 2

1) $x y' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$
2) $x y' - y = e^{-x^2} y^3$
3) $(6y^2 + 3x^2 y + 1) y' - 3\mathrm{xy}^2 + x^2 = 0$

Вариант 3

1) $x y' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
2) $\sin x \cdot y' = -y\cos x - \sin x$
3) $(\mathrm{xy} + \sin y)\mathrm{dx} + \left(\dfrac{x^2}{2} + y^2 + x\cos y\right)\mathrm{dy} = 0$

Контрольная работа № 2
по обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям
***n*-го порядка**

Вариант 1

Решить уравнения

1) $y''' - 4y'' = 1 - 12x^2$

2) $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\dfrac{x}{\pi}}$

3) Указать вид частного решения уравнения
$y'' + 6y' + 9y = e^{-x}(x-3)\sin 2x$

Вариант 2

Решить уравнения

1) $y'' + 4y = 10\sin 2x$

2) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$

3) Указать вид частного решения уравнения
$y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(\cos 2x - 2\sin 2x)$

Вариант 3

Решить уравнения

1) $y'' + 2y' - 3y = e^{x} - \cos x$

2) $y'' + y = \mathrm{ctg}x$

3) Указать вид частного решения уравнения
$y'' - 6y' + 18y = \mathrm{x}\mathrm{e}^{3x}\cos 3x$

Вариант теста по обыкновенным дифференциальным уравнениям

ЗАДАНИЕ 1.

Установите соответствие между номером уравнения и его типом

1) $xy' + 2y = x^4 \sin 2x$ 2) $(1 + y^2 \sin 2x)\mathrm{dx} - 2y\cos^2 \mathrm{xdy} = 0$

3) $y' - \frac{4y}{x} = 2x\sqrt{y}$ 4) $y\sqrt{3 + 2x^2}\, y' = x\sqrt{3 + 2y^2}$.

- уравнение с разделяющимися переменными,
- линейное дифференциальное уравнение,
- уравнение в полных дифференциалах,
- уравнение Бернулли,
- уравнение, приводящееся к однородному.

ЗАДАНИЕ 2.

Дано уравнение первого порядка $(5\mathrm{xy}^2 + x^3)\mathrm{dx} - (y^2 - 5x^2 y)\mathrm{dy} = 0$ в форме, содержащей дифференциалы. Приведите его к виду, разрешенному относительно производной.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 3.

Дано дифференциальное уравнение $y' = (2k + 3)x^4$, тогда функция $y = 2x^5$ является его решением при k, равном:

Ответ	

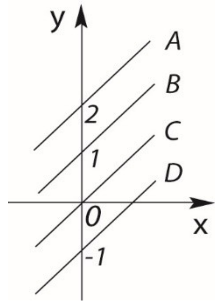
ЗАДАНИЕ 4.

Общий интеграл дифференциального уравнения $y^2 \mathrm{dy} = \frac{\mathrm{dx}}{x^2}$ имеет вид

Ответ	

ЗАДАНИЕ 5.

Укажите интегральную кривую решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $xy' = y - 1;\ y(1) = 2$.



ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) A 2) B 3) C 4) D.

ЗАДАНИЕ 6.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $y''=x^2+x$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$ 2) $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$

3) $y=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$ 4) $y=6x^4+2x^3+C_1x$.

ЗАДАНИЕ 7.

Решение задачи Коши $y''=2x+1$, $y(0)=y'(0)=0$ имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=\frac{x^3}{3}+x^2$ 2) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$ 3) $y=\frac{x^3}{6}+x^2$ 4) $y=\frac{x^3}{2}-x$.

ЗАДАНИЕ 8.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $2xy''-y'=0$, тогда его общее решение имеет вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ 9.

Дано дифференциальное уравнение второго порядка $y''\operatorname{ctg}4x+4y'=0$, тогда его общее решение имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $y=0,25C_1\sin 4x+C_2$ 2) $y=-C_1\cos 4x+C_2$

3) $y=C_1\sin 4x+C_2$ 4) $y=-C_1\sin 4x+C_2$.

ЗАДАНИЕ 10.

Корни характеристического уравнения равны $k_1=k_2=-1$, $k_{3,4}=\pm 2$, тогда фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=\cos 3x, y_4=\sin 3x$

2) $y_1=e^{-x}, y_2=e^{-2x}, y_3=e^{3x}, y_4=e^{-3x}$

3) $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=\cos 3x, y_4=-\sin 3x$

4) $y_1=e^{-x}, y_2=xe^{-x}, y_3=e^{2x}, y_4=e^{-2x}$.

ЗАДАНИЕ 11.

Корни характеристического уравнения равны $k_1=k_2=5, k_{3,4}=5\pm i$. тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

Ответ	

ЗАДАНИЕ 12.

Известна фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения: $y_1=1, y_2=x, y_3=x^2$. Тогда частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=2, y'(0)=-1$,
$y''(0)=-2$, равно:

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=2+x-x^2$ 2) $y=2-x-2x^2$ 3) $y=2-x-x^2$ 4) $y=2-x-0{,}5x^2$.

ЗАДАНИЕ 13.

Функция $y=C_1e^x+C_2\,\mathrm{x}\mathrm{e}^x$ является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, тогда его характеристическое уравнение имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $k^2-1=0$ 2) $k^2-k=0$ 3) $k^2+2k+1=0$ 4) $k^2-2k+1=0$.

ЗАДАНИЕ 14.

Общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'+3y=0$ имеет вид

Ответ	

ЗАДАНИЕ 15.

Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'+2y=2x-1$ по виду его правой части соответствует функция

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y_{\square}=\mathrm{Ax}^2+\mathrm{Bx}$ 2) $y_{\square}=\mathrm{Ax}+B$ 3) $y_{\square}=\mathrm{Ax}$ 4) $y_{\square}=\mathrm{Ax}^2+\mathrm{Bx}+C$. .

ЗАДАНИЕ 16.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $2y''+y'+2y=\mathrm{x}\mathrm{e}^x\sin 2x$. Записать вид частного решения с неопределенными коэффициентами

Ответ	

ЗАДАНИЕ 17.

Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $y''+4y=2\operatorname{ctg}2x$. В каком виде следует искать частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных ?

Ответ	

ЗАДАНИЕ 20.

Общее решение системы дифференциальных уравнений $\{y_1'=3y_2,$

имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\{y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x},$ 2) $\{y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x},$

3) $\{y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{3x},$ 4) $\{y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x},$

Расчетно-графическая работа (РГР) по уравнения математической физики

Вариант

1. Разложить функцию

$$y=\begin{cases}0 & \text{при } -3\le x<0\\ 2x/3 & \text{при } 0\le x<3/2\\ 0 & \text{при } 3/2\le x\le 3\end{cases}$$

в ряд Фурье:

- построить график заданной функции на отрезке её определения;
- вычислить коэффициенты её ряда Фурье;
- записать ряд Фурье для заданной функции;

- построить график полученного ряда Фурье на отрезке определения заданной функции.

2. В виде ряда Фурье найти решение $y = y(x)$ краевой задачи

$$y'' = q(x), (0 \le x \le 3), y(0) = 0, y'(3) = 0,$$

где $q(x)$ – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке [0, 3] функция

3. Найти решение $u = u(x, t)$ начально-краевой задачи для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (0 \le x \le 3, t \ge 0),$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0, u(x,0) = (x \text{ при } 0 \le x \le 3/2,.$$

5. Найти решение $u = u(x, t)$ начально-краевой задачи для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-x)\sin 2t, (0 \le x \le 1, t \ge 0),$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Вариант тестового задания по уравнениям математической физики

ЗАДАНИЕ 1

Для функции $f(x)$ с периодом $T = 4$ справедливо равенство

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $f(x/4) = f(x)$ 2) $f(4x) = f(x)$

3) $f(x+4) = f(x)$ 4) $f(x+2) = f(x)$.

ЗАДАНИЕ 2

Укажите функции с периодом $T = 2$ из перечисленных ниже.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = \sin 2\pi x$ 2) $y = \operatorname{ctg} 2\pi x$ 3) $y = \cos \pi x$ 4) $y = \operatorname{tg}(\pi x/2)$.

ЗАДАНИЕ 3

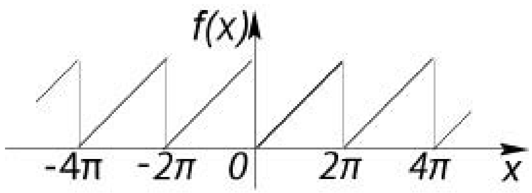
Какая из перечисленных ниже функций описывает гармонические незатухающие колебания? Укажите смысл параметров: A, ω, ϕ.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$

2) $f(x) = A/(\omega x + \phi)$ 3) $f(x) = A(\omega x + \phi)$ 4) $f(x) = A(\omega x + \phi)^2$.

ЗАДАНИЕ 4

Функция $f(x)$ при $x \in [0, 2\pi]$ и её периодическое продолжение показаны на рисунке



Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ: 1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 2) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 3)

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 4) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

ЗАДАНИЕ 5

Дана функция $f(x) = 2x^2, x \in [-l, l]$. Тогда коэффициент b_3 разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье равен

Ответ	

ЗАДАНИЕ 6

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\{-1 \text{ при } -1\le x<0,$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 7

Найдите решение краевой задачи $y''=q(x),\ y(0)=0,\ y(2)=0$ в виде ряда Фурье, если $q(x)=q_0=\mathrm{const}$.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 8

К какому типу относится линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+3u=0?$$

Ответ	

ЗАДАНИЕ 9

Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=10^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (u(x,t)[м];0\le x\le l,t\ge 0)$ описывает малые свободные поперечные колебания струны. Концы струны закреплены неподвижно. Найдите основную частоту ω $[1/\text{сек}]$ собственных колебаний струны, если длина струны $l=50м$.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 10

Найдите коэффициент температуропроводности a^2 $[м^2/\text{сек}]$ в уравнении теплопроводности стержня

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (0\le x\le l,t\ge 0),$$

если коэффициент теплопроводности материала $k=50\,\text{Дж}/(м\cdot\text{град}\cdot\text{сек})$, удельная теплоемкость $c=500\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{град})$, удельная плотность материала стержня $\rho=7000\,\text{кг}/м^3$.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 11

Общее решение начально – краевой задачи для однородного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad (0\le x\le l,t\ge 0)$$

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0,\ u(x,0)=f(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\phi(x)$$

имеет вид $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi\,\mathrm{at}}{l}+B_n\sin\frac{n\pi\,\mathrm{at}}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$

где A_n и B_n - произвольные постоянные:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{dx},\qquad B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{dx}.$$

Запишите решение задачи при $a=4,\ l=2,\ f(x)=1,\ \phi(x)=0$.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 12

Дано неоднородное волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$ при однородных граничных и начальных условиях

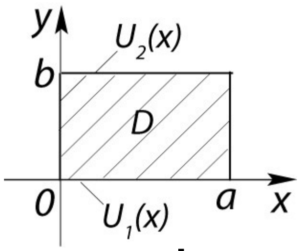
$$u(0,t)=u(8,t)=0,\quad u(x,0)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Найдите (с точностью до множителя) собственные функции задачи.

Ответ	

ЗАДАНИЕ 13

Общее решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ в прямоугольной области $D:0\le x\le a, 0\le y\le b$, при однородных граничных условиях на вертикальных сторонах области $u(0,y)=0, u(a,y)=0$



имеет вид $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \operatorname{sh}\dfrac{n\pi(b-y)}{a}+b_n \operatorname{sh}\dfrac{n\pi y}{a}\right]\sin\dfrac{n\pi x}{a}\left(\operatorname{sh}\dfrac{n\pi b}{a}\right)^{-1}$,

где $\alpha_n=\dfrac{2}{a}\int_0^a U_1(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}\,\mathrm{dx}$, $\quad b_n=\dfrac{2}{a}\int_0^a U_2(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}\,\mathrm{dx}$.

Найдите значение функции $u(x,y)$ в центре области при $a=6$, $b=4$, если

$$U_1(x)=(x \text{ при } 0\le x\le 3,,\quad U_2(x)=0.$$

Ответ	

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если он регулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил полностью все задания и их защитил, ответив на вопросы преподавателя;
- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если он нерегулярно в течение семестра представлял решения задач, выполнил задания не полностью или вообще не представлял работы на проверку, допускает существенные неточности в ответах на вопросы преподавателя.

Для проведения текущего контроля знаний студентов в дистанционном формате в разработанном кафедрой «Математика» онлайн-курсе «Дифференциальные уравнения» имеются промежуточные (пробные) тесты.

3.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация - (зачет) проводится по билетам в устной форме.
Время для подготовки ответа на вопросы не более 45 мин.
Билет включает один теоретический вопрос и задачи.
Комплекты билетов хранятся на кафедре «Математика».
Типовые варианты билетов прилагаются.

Комплект вопросов

по разделу **«Обыкновенные дифференциальные уравнения»**

- Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: определение обыкновенного дифференциального уравнения, формы записи обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, понятия общего и частного решений, общего и частного интегралов.
- Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
- Теорема существования и единственности решения для дифференциального уравнения первого порядка.
- Геометрический смысл общего интеграла обыкновенного д.у. первого порядка.
- Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными.
- Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной.
- Дифференциальные уравнения n-го порядка. Основные понятия: формы записи, понятия общего и частного решений.
- Постановка задачи Коши и краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка.
- Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка методом понижения порядка.
- Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Общие свойства решений: понятия линейно зависимых и линейно независимых решений, определителя Вронского, понятие фундаментальной системы решений,
- Теорема о структуре общего решения обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.
- Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, его связь с дифференциальным уравнением.
- Вид частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n - го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения.
- Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Теорема о структуре общего решения.
- Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения для правых частей вида
$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x},\quad f(x)=M\cos\beta x+N\sin\beta x,$$
$$f(x)=P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
- Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных.
- Постановка и решение задачи на собственные значения.
- Системы дифференциальных уравнений. Понятие нормальной системы. Понятия общего и частного решений системы. Теорема о приведении дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе. Метод исключения неизвестных.

Вопросы по рядам Фурье

1. Дайте определение основной тригонометрической системы функций.
2. Тригонометрические синусы и косинусы ортогональны на промежутке $[-\pi,\pi]$, если……………………………………………………………………..
3. Как ставится основная задача гармонического анализа ?
4. Запишите ряд Фурье для функций с периодом $T=2\pi$.
5. Условия Дирихле.
6. Сформулируйте теорему о разложимости функции в ряд Фурье.
7. Запишите ряд Фурье для четных функций с периодом $T=2\pi$.
8. Запишите ряд Фурье для нечетных функций с периодом $T=2\pi$.
9. Запишите ряд Фурье для функций с произвольным периодом $T=2l$.

10. Запишите ряд Фурье для четных функций с произвольным периодом $T = 2l$.
11. Запишите ряд Фурье для нечетных функций с произвольным периодом $T = 2l$.
12. Как осуществляется разложение в ряд Фурье непериодических функций?
13. Как осуществляется разложение в ряд Фурье функций, заданных на интервале $(0, l)$, четным образом?
14. Как осуществляется разложение в ряд Фурье функций, заданных на интервале $(0, l)$, нечетным образом?
15. Применение рядов Фурье к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вопросы по уравнениям математической физики

1. Классификация уравнений математической физики.
2. Перечислите основные уравнения математической физики и задачи, к ним приводящие.
3. Постановка начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения.
4. Решение однородного волнового уравнения методом разделения переменных.
5. Физическое истолкование решения задачи о малых свободных колебаниях струны конечных размеров. Стоячие волны. Собственные частоты колебаний струны.
6. Постановка задачи о вынужденных колебаниях струны при отсутствии начальных возмущений.
7. Решение неоднородного волнового уравнения методом разложения по собственным функциям.
8. Уравнение Лапласа. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа.
9. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области методом разделения переменных (для различных комбинаций граничных условий).
10. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольной области с помощью двойного тригонометрического ряда Фурье.

Типовой вариант билета к зачету

по дисциплине «Математические методы моделирования физических процессов»

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Факультет базовых компетенций, Кафедра «Математика»
Дисциплина «Математические методы моделирования физических процессов»
Курс 2, семестр 3

БИЛЕТ К ЗАЧЕТУ

1. Решить уравнение: $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = 2x$.
2. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{y}{1+x^2} + e^{\operatorname{arctg} x}, \; y(0) = 1$.
3. Найти решение краевой задачи с применением рядов Фурье:
   $$y'' = q(x), \quad y(0) = y(4) = 0 \,;\, q(x) = \{ x \text{ при } 0 \le x \le 2 \,,$$
4. Решить начально – краевую задачу: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad u(0,t) = 0, \; \dfrac{\partial u(9,t)}{\partial x} = 0,$
   $$u(x,0) = \{ 0 \text{ при } 0 \le x < 3 \; \{ 3 \text{ при } 3 \le x < 6$$

Утверждено на заседании кафедры математики « 03» 05 2023 г., протокол № 10

И.о. зав. кафедрой Н.В. Васильева /_____________________/

Для проведения промежуточного контроля знаний студентов в дистанционном формате в разработанных кафедрой «Математика» онлайн-курсах имеются итоговые тесты.