

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХ)

Кафедра «СМАРТ-технологии»

Л.Д. Луганцев

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В САПР

Учебно-методическое пособие

Текстовое электронное издание

Москва
2021

Об издании [1](#), [2](#)

УДК 004.896
ББК 30.2-5.05
Л83

Рецензенты:

*О.А. Гурьянова, заведующая кафедрой инновационных технологий
ФГБОУ ДПО «Академия медиаиндустрии»;
Е.А. Пухова, к.т.н., доцент кафедры «Инфокогнитивные технологии»
Московского Политеха*

Л83 **Луганцев, Л.Д.** Оптимизация технических объектов в САПР: учебно-методическое пособие / Л.Д. Луганцев. – Москва: Московский Политех, 2021. – 1 CD-R. – Загл. с титул. экрана. – Текст: электронный.
ISBN 978-5-2760-

Рассмотрены теоретические основы и практические методы решения задач оптимального проектирования технических систем и объектов в САПР. Изложены основные понятия параметрической оптимизации конструкций. Приведены методы решения задач безусловной и условной оптимизации. Особое внимание уделено методам глобальной минимизации целевых функций с учетом прямых и функциональных ограничений. В качестве примера рассмотрено решение задачи оптимального проектирования вращающихся дисков машин при температурном воздействии.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», профиль «Интеграция и программирование в САПР». Может быть использовано студентами других направлений подготовки, связанных с изучением и применением методов оптимального проектирования элементов технических систем и объектов.

УДК 004.896
ББК 30.2-5.05

*Системные требования: PC-совместимый процессор 1,3 ГГц и выше.
Оперативная память (RAM): 256 Мб. Необходимо на винчестере: 350 Мб.
Операционные системы: Windows, Mac OS. Видеосистема: разрешение экрана
1024x768. Дополнительные программные средства:
Adobe Acrobat Reader 9 и выше.*

ISBN 978-5-2760-

© Луганцев Л.Д., 2021
© Московский Политех, 2021

Содержание

Введение	5
1. ПОНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНОГО И РАЦИОНАЛЬНОГО РЕШЕНИЙ	8
2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.....	13
3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.....	17
3.1. Компромиссная кривая в задачах оптимизации без ограничений.....	17
3.2. Компромиссная кривая в задачах оптимизации с ограничениями	19
3.3. Построение целевой функции с учетом нескольких критериев эффективности	21
3.5. Мультипликативные методы свертывания вектора критериев эффективности	24
4. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.....	26
4.1. Метод дихотомического деления.....	26
4.2. Метод золотого сечения	27
4.3. Метод чисел Фибоначчи	28
4.4. Методы полиномиальной аппроксимации.....	29
5. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.....	31
5.1. Метод покоординатного спуска	31
5.2. Метод вращающихся координат (метод Розенброка).....	33
5.3. Методы случайного поиска	33
5.4. Метод наискорейшего спуска.....	33
6. МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ.....	34
6.1. Метод множителей Лагранжа.....	34
6.2. Методы штрафных функций	35
6.3. Метод проекции градиента	36

7. МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ	38
7.1. Метод ненаправленного сканирования	39
7.2. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)...	40
7.3. Метод направленного сканирования	43
8. МЕТОДЫ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ПОИСКА С ЗАПРЕТАМИ	46
8.1. Метод локальной оптимизации	46
8.2. Метод поиска с запретами	46
9. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МЕТОДЫ.....	47
10. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ МАШИН.....	50
10.1. Постановка задачи	50
10.2. Моделирование напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков машин.....	54
10.3. Метод и алгоритм расчета дисков машин	64
10.4. Программное обеспечение инженерного анализа и оптимального проектирования дисков машин.....	71
Заключение	86
Список литературы.....	88
ПРИЛОЖЕНИЕ. Задание на курсовую работу «Анализ напряженно-деформированного состояния и оптимальное проектирование вращающихся дисков машин».....	89

Введение

В процессе проектирования конструктор использует свой опыт, создавая новую или модернизируя известную конструкцию, а затем осуществляет проверочные расчеты с целью обоснования работоспособности и надежности изделия. Итерационный характер процесса проектирования, в котором этапы графического синтеза сменяются этапами инженерного анализа, предопределяет многократное повторение расчетов и требует значительных затрат времени при выборе наилучшего варианта конструкции.

Применение методов машинного анализа и ЭВМ дает наибольший эффект, когда от автоматизации решения отдельных инженерных задач переходят к комплексной автоматизации процесса проектирования на основе создания и использования систем автоматизированного проектирования.

Основное преимущество и высокая эффективность САПР обусловлены, прежде всего, тем, что с их помощью становится возможным оптимальное проектирование машин, т.е. поиск наилучшего в определенном смысле варианта проектного решения среди множества возможных. Именно за счет оптимизации конструкций путем синтеза и анализа математических моделей может быть получен наибольший эффект при разработке и внедрении новой техники.

При оптимальном проектировании осуществляется выбор параметров, наилучшим образом удовлетворяющих требованиям, которые предъявляются к разрабатываемым конструкциям. При этом решение осложняется тем обстоятельством, что задачи оптимального проектирования в машиностроении, как правило, являются многокритериальными и многоэкстремальными с противоречивыми целевыми функциями. Для успешного решения многокритериальных задач оптимизации необходимо обоснованное определение допустимого множества решений и выбор эффективного метода его исследования.

В первом разделе настоящего учебно-методического пособия излагаются основные понятия теории исследования операций

применительно к постановке и решению задач оптимизации технических объектов.

Во втором разделе основное внимание уделяется вопросам классификации задач и методов параметрической оптимизации. Рассматриваются задачи условной и безусловной оптимизации, линейного и нелинейного программирования, методы одномерной и многомерной оптимизации, локального и глобального поиска, градиентные и поисковые методы.

В третьем разделе рассматривается проблема поиска наилучших компромиссных решений в задачах оптимизации. Излагаются методы формирования целевой функции с учетом нескольких критериев эффективности.

Четвертый раздел пособия содержит методы одномерной оптимизации: дихотомического деления, золотого сечения и др.

В пятом разделе излагаются методы безусловной оптимизации. Рассматриваются методы нулевого порядка, методы с использованием производных, а также методы случайного поиска.

Методы поиска условных экстремумов целевой функции при наличии ограничений приводятся в шестом разделе пособия.

В седьмом разделе излагаются методы глобальной минимизации целевых функций с учетом прямых и функциональных ограничений. Особое внимание уделяется методу направленного сканирования как наиболее эффективному при решении многопараметрических и многоэкстремальных задач оптимального проектирования в машиностроении.

Восьмой раздел содержит методы локальной оптимизации и поиска с запретами.

В девятом разделе пособия рассматриваются эволюционные методы решения оптимизационных задач, составляющие один из разделов искусственного интеллекта.

Десятый раздел посвящен систематическому изложению метода инженерного анализа и оптимального проектирования вращающихся дисков машин и его реализации в виде прикладного программного обеспечения.

В приложении приведено развернутое техническое задание на курсовую работу по оптимальному проектированию дисков машин.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», профиль «Интеграция и программирование в САПР». Может быть использовано студентами других направлений подготовки, связанных с изучением и применением методов оптимального проектирования элементов технических систем и объектов.

1. ПОНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНОГО И РАЦИОНАЛЬНОГО РЕШЕНИЙ

Математическая теория принятия оптимальных (рациональных, целенаправленных) решений называется теорией **исследования операций**. Задачей этой теории является построение методов анализа процессов принятия решений. С точки зрения математического описания под принятием решений понимается выбор определенного элемента из некоторого множества. При этом определяется правило выбора, целесообразность выбора и понятие оптимальности решения.

Решение, удовлетворяющее поставленным условиям, называется **допустимым**. Из допустимых в процессе решения задачи выбирается оптимальное или рациональное решение.

Под **оптимальным** понимают такое **допустимое** решение, которое является наилучшим с точки зрения выбранного критерия оптимальности.

Оптимизация, как выбор наилучшего варианта среди некоторого множества, подразумевает наличие правила предпочтения одного варианта другому. Такое правило называют **критерием оптимальности**.

Критерий оптимальности формируется на основе одного или нескольких **критериев эффективности**.

Не все критерии эффективности и ограничения могут быть формализованы (эстетичность, технологичность, компактность системы и пр.). Такие критерии и ограничения анализируются путем качественной оценки проектируемого изделия экспертами в области эстетики, дизайна, компоновки, технологии и т.п. В этом случае вводят понятие рационального решения.

Под **рациональным** (от лат. ratio – разум) понимают решение, которое получается **неформальным** путем (например, с учетом экспертных оценок).

Оптимальная конструкция может оказаться нерациональной. Например, оптимальный проект по критерию материалоемкости может оказаться нетехнологичным, если такое требование не было поставлено в техническом задании на проектирование.

Проблема оптимизации имеет два основных аспекта:

– необходимо **поставить задачу оптимизации**, определив при этом понятия «наилучшее решение», «оптимальное решение»;

– необходимо **построить** математическую модель рассматриваемой задачи и **решить** задачу.

Параметры математической модели параметрической задачи оптимизации, можно представить в форме вектора: $Z = (X, Y)$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор **управляемых** (изменяемых в процессе оптимизации) **параметров**, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – вектор **неуправляемых** (неизменяемых) **параметров**.

Пример

Выполняется оптимизация тонкостенного сосуда, работающего под заданным давлением q . Здесь величина давления q , а также механические характеристики конструкционного материала E, μ – неуправляемые параметры; толщина стенки сосуда h – управляемый параметр.

В зависимости от постановки оптимизационной задачи применительно к выбранной математической модели соотношение числа управляемых n и неуправляемых m параметров может изменяться, но их сумма $(n + m)$ является постоянной величиной.

Критерий эффективности – показатель, позволяющий количественно производить оценку эффективности проектных решений.

Примеры: $f_1(X)$ – объем изделия; $f_2(X)$ – масса изделия; $f_3(X) = f_1(X) / f_2(X)$; $f_4(X)$ – стоимость и т.д.

Если при проектировании учитывается одновременно несколько критериев эффективности, то вводится понятие **вектора критериев эффективности**:

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)).$$

Такие задачи называют **многокритериальными**. При этом критерии эффективности, входящие в векторный критерий $F(X)$ могут быть **непротиворечивыми** и **противоречивыми**.

Например, критерии массы и стоимости непротиворечивы. Оба критерия минимизируются при проектировании. Критерии массы и объема аппарата – противоречивы.

Зачастую для получения оптимального решения выполняется переход от задачи векторной оптимизации (очень трудно определить векторный оптимум) к задаче оптимизации со специально сформированной скалярной **функцией цели**:

$$C(X) = \Phi[f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)].$$

Функция цели является обобщенным критерием оптимальности для задачи многокритериальной оптимизации. Процесс формирования функции цели называется **объединением (свертыванием)** векторного критерия оптимальности $F(X)$ в скалярный критерий $C(X)$.

Таким образом, под **целевой функцией** понимают специально сформированную скалярную функцию, получаемую в результате свертывания векторного критерия оптимальности.

Пусть G_C – множество допустимых значений аргументов x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), для которых значения целевой функции $C(X)$ определены; G_D – множество допустимых значений аргументов x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), для которых значения всех функций ограничений $\varphi_k(X)$, ($k = 1, 2, \dots, m$) также определены.

Область $G = G_C \cap G_D$ является областью определения целевой функции и функций ограничения одновременно и называется **пространством проектирования**. Пространство проектирования G содержит множество всех возможных (допустимых и недопустимых) проектных решений.

Размерность пространства проектирования G определяется размерностью n вектора управляемых параметров $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

При проектировании новых систем, оборудования и конструкций зачастую возникает необходимость учета различных требований. Таковыми применительно к техническим объектам являются условия прочности, жесткости, ограничения на размеры, массу изделия и т.д. Поэтому в задачах проектирования, как

правило, присутствуют те или иные ограничения. Прежде всего – это **прямые ограничения** или **ограничения на параметры**:

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Такие ограничения, как правило, связаны с технологией производства проектируемых объектов.

Кроме прямых ограничений в задачах проектирования технических объектов присутствуют **функциональные ограничения**:

$$\varphi_k(X) \leq 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Это могут быть ограничения на напряженное или деформированное состояние объекта, условия прочности, устойчивости, долговечности изделий и т.п. Зачастую функции $\varphi_k(X)$ заданы сложными алгоритмами. Наличие ограничений приводит к задаче условной оптимизации.

Решение, которое удовлетворяет всем заданным ограничениям (как прямым, так и функциональным), называется **допустимым**. Из допустимых решений в процессе решения задачи оптимизации выбирается оптимальное решение.

Численное решение задачи оптимизации предполагает многократное вычисление значений целевой функции и функций ограничений в процессе поиска оптимального решения. В задачах параметрической оптимизации под **испытанием системы** понимают однократное вычисление значений целевой функции и функций ограничения с целью анализа ограничений для заданной точки $X \in G$, т.е. однократное получение информации для k -го варианта проектного решения $X^{(k)} \in G$.

Выбор метода оптимизации существенно зависит от времени t , требующегося на одно испытание системы на ЭВМ:

$$t = t_C + \sum_{k=1}^m t_k$$

где t_C – время вычисления значения целевой функции $C(X)$; t_k – время анализа k -го ограничения по принятой математической модели.

При численном решении задач оптимизации технических объектов **областью поиска** оптимальных решений служит подпространство Π пространства проектирования G , которое опре-

деляется множеством точек X , удовлетворяющих прямым ограничениям на управляемые параметры:

$$\Pi = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, (i = 1, 2, \dots, n)\}, \Pi \subset G.$$

Область допустимых решений D определяется множеством допустимых решений, удовлетворяющих всем принятым ограничениям (прямым и функциональным):

$$D = \{X : \varphi_k(X) \leq 0, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m\}.$$

Область D является подмножеством множества Π , т.е.

$$D \subset \Pi \subset G.$$

При численном решении задач параметрической оптимизации область Π должна иметь наименьший объем

$$V_{\min} = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \text{ включать область допустимых решений } D \neq \mathbf{0}$$

и, следовательно, содержать оптимальное решение: $X^*, C(X^*)$.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Общая постановка оптимизационной параметрической задачи состоит в следующем: требуется найти множество оптимальных управляемых параметров $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, определяющих точку оптимума X^* в области допустимых решений D и оптимальное (наибольшее или наименьшее) значение целевой функции $C(X)$ в точке X^* , т.е. $C(X^*)$. Решение задачи оптимизации должно удовлетворять условию:

$$C(X^*) = \underset{X \in D}{\text{opt}} C(X).$$

Основными методами *оптимизации в САПР* являются поисковые методы. Поисковые методы основаны на пошаговом изменении вектора управляемых параметров:

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k.$$

В большинстве поисковых методов приращение ΔX_k вектора управляемых параметров вычисляется по формуле

$$\Delta X_k = h \cdot g(X_k).$$

Здесь X_k – значение вектора управляемых параметров на k -м шаге; h – шаг; $g(X_k)$ – направление поиска. Если выполняются условия сходимости, то реализуется пошаговое приближение к экстремуму.

Каждый метод характеризуется следующими факторами:

- способом вычисления направления поиска $g(X_k)$;
- способом выбора шага h ;
- способом определения окончания поиска.

Основным фактором является способ вычисления направления поиска.

Шаг поиска минимума целевой функции в выбранном направлении $g(X_k)$ может быть или постоянным, или назначаться в соответствии с выбранным методом одномерной оптимизации.

Окончание поиска обычно осуществляют следующим образом: если на протяжении r подряд выполненных шагов траектория поиска остается в малой ε -окрестности текущей точки поиска X_k , то поиск следует прекратить. Условие окончания поиска имеет вид $|X_k - X_{k-r}| < \varepsilon$.

Методы оптимизации классифицируют по ряду признаков.

В зависимости от числа управляемых параметров различают методы одномерной и многомерной оптимизации. В методах *одномерной оптимизации* управляемый параметр единственный, при этом размерность вектора управляемых параметров X не менее двух. Практические задачи в САПР многомерны, методы одномерной оптимизации играют вспомогательную роль на отдельных этапах многомерного поиска.

Различают методы условной и безусловной оптимизации по наличию или отсутствию ограничений.

К *задачам безусловной оптимизации* относят задачи, в которых экстремум отыскивается в пределах неограниченного пространства управляемых параметров, т.е. задачи, в которых *отсутствуют ограничения*. В задачах безусловной оптимизации требуется найти оптимальную точку $X^* \in G_C$ и значение целевой функции $C(X^*)$ в этой точке. При этом оптимальное решение должно удовлетворять условию

$$C(X^*) = \operatorname{opt}_{X \in G_C} C(X).$$

К *задачам условной оптимизации* относят оптимизационные задачи, когда в их постановке предусмотрены прямые или функциональные ограничения. В задачах условной оптимизации требуется найти оптимальную точку $X^* \in D$ на множестве допустимых решений и значение целевой функции $C(X^*)$ в этой точке. При этом оптимальное решение должно удовлетворять условию

$$C(X^*) = \operatorname{opt}_{X \in D} C(X).$$

Точка X^* может быть как внутренней, так и граничной точкой области D .

Для практических задач в САПР характерно наличие ограничений, однако методы *безусловной оптимизации* также представляют интерес, поскольку задачи *условной оптимизации* могут быть сведены к задачам без ограничений.

В зависимости от числа экстремумов целевой функции различают задачи одно- и многоэкстремальные. Если метод оптимизации ориентирован на определение какого-либо локального экстремума, то такой метод относится к локальным методам, и его называют *методом локального поиска*. Если же результатом является глобальный экстремум, то метод называют *методом глобального поиска*.

В зависимости от того, используются при поиске производные *целевой функции* по управляемым параметрам или нет, различают методы нескольких порядков. Если производные не используются, то имеет место *метод нулевого порядка*, если используются первые или вторые производные, то, соответственно, – метод первого или второго порядка. Методы первого порядка называют также градиентными, поскольку вектор первых производных $F(X)$ по X есть градиент целевой функции

$$\text{grad}(F(X)) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

В зависимости от свойств целевой функции и функций ограничений различают задачи линейного программирования и задачи нелинейного программирования.

В задачах *линейного программирования* целевая функция и функции ограничений являются линейными функциями.

В задачах *нелинейного программирования* целевая функция или функции ограничений являются нелинейными.

В свою очередь задачи нелинейного программирования подразделяются на *выпуклые* и *невыпуклые*. При этом учитываются признаки выпуклости целевой функции, функций ограничений и области допустимых решений D .

Функция $f(X)$ называется *выпуклой*, если для любых значений $X_1, X_2 \in G$, $\alpha \in [0, 1]$ выполняется нестрогое неравенство:

$$f[\alpha \cdot X_1 + (1 - \alpha) \cdot X_2] \leq \alpha \cdot f(X_1) + (1 - \alpha) \cdot f(X_2).$$

При проектировании технических объектов имеют место также постановки задач, при которых требуется найти точку X^* с целью удовлетворения заданных ограничений $\varphi_k(X) \leq 0$. При этом целевая функция $C(X)$ не рассматривается и не влияет на определение точки X^* . Такой тип задачи относят к классу обратных задач.

Примером обратных задач могут служить задачи распределения материала в элементах и системах из условий заданного уровня напряжений, заданных перемещений, заданных параметров критических воздействий и т.п. (например, задача о брусе равного сопротивления).

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Вектор критериев эффективности в случае многокритериальной задачи:

$$F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)).$$

Рассматривая последовательно каждый критерий эффективности $f_1(X)$, $f_2(X)$, ..., $f_k(X)$ как скалярную целевую функцию, можно найти решения ряда оптимизационных задач для каждой целевой функции:

$$\{X_1^*, f_1(X_1^*)\}, \{X_2^*, f_2(X_2^*)\}, \dots, \{X_k^*, f_k(X_k^*)\}.$$

Проблема состоит в том, чтобы выбрать «наилучшее» *компромиссное* решение:

$$\{X^*, f_1(X^*), f_2(X^*), \dots, f_k(X^*)\}.$$

3.1. Компромиссная кривая в задачах оптимизации без ограничений

Рассмотрим компромиссные решения при наличии двух критериев эффективности: $f_1(X)$ и $f_2(X)$. Допустим, что эти критерии эффективности являются непротиворечивыми, т.е. в точке A достигается минимальное значение $f_1(X)$, а в точке B соответственно достигается минимальное значение $f_2(X)$. На рис. 3.1 показаны уровни функций $f_1(X)$ и $f_2(X)$. В точке C пересекаются уровни функций $f_1(X) = f_1(X_B^*) = \text{const}$ и $f_2(X) = f_2(X_A^*) = \text{const}$, которые проходят соответственно через точки A и B . Область K называется областью *компромиссных решений*.

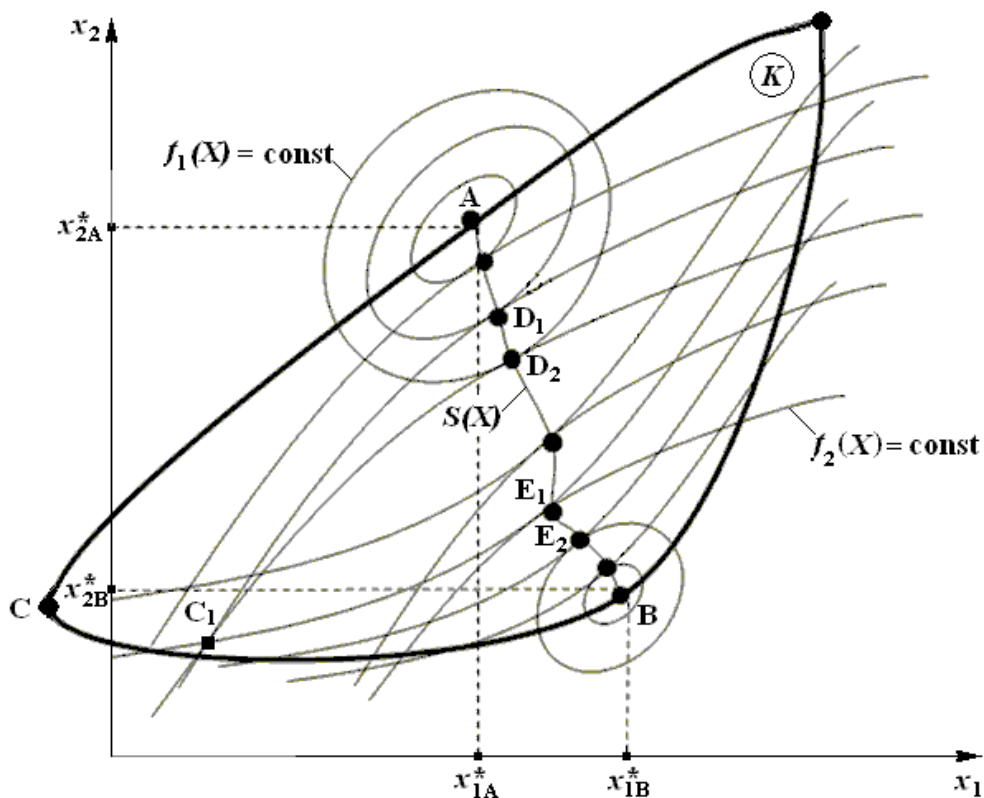


Рис. 3.1. Область компромиссных решений

Возьмем произвольную точку $C_1 \in K$. Двигаясь по уровню $f_1(X) = f_1(X_{C_1}) = \text{const}$ с целью минимизации функции $f_2(X)$, получим точку E_1 . Аналогично можно двигаться по уровню $f_2(X) = f_2(X_{C_2}) = \text{const}$ с целью минимизации функции $f_1(X)$. Тогда получим точку D_1 . Таким образом, можно получить точки E_i, D_i при последовательном задании точек $C_i \in K$, $(i = 1, 2, \dots)$.

Соединяя точки A, E_i, D_i, B , получим кривую $S(X)$. Так как любая точка кривой $S(X)$ определяет наименьшее значение одного критерия эффективности при фиксированном значении другого критерия эффективности, то кривая $S(X)$ называется **кривой наилучших компромиссных решений** из всех компромиссных решений множества K .

На рис.3.1 видно, что при движении вдоль компромиссной кривой $S(X)$ из точки A в точку B значение функции $f_1(X)$ монотонно возрастает, а значение функции $f_2(X)$ монотонно убывает. Эти две функции конкурируют между собой.

На рис. 3.2 показан график значений функции $f_2(X)$ в зависимости от значений функции $f_1(X)$ для компромиссной кривой $S(X)$ между точками A и B , представляющих собой точки локальных минимумов функций $f_1(X)$ и $f_2(X)$.

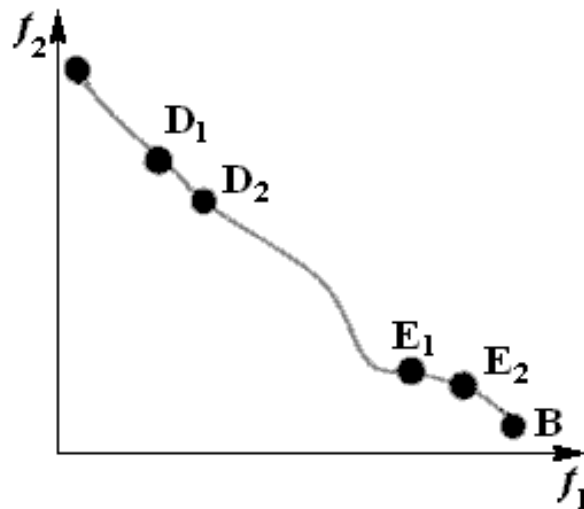


Рис. 3.2. Кривая наилучших компромиссных решений

3.2. Компромиссная кривая в задачах оптимизации с ограничениями

Рассмотрим построение кривой $\tilde{S}(X)$ при наличии двух критериев эффективности $f_1(X)$ и $f_2(X)$ в области допустимых решений $D = \{X : g(X) \leq 0\}$.

Используя прием последовательного движения по уровням функции $f_2(X) = \text{const}$ с целью минимизации функции $f_1(X)$ в пределах области допустимых значений D , получим компромиссную кривую с точками $\tilde{S}(X)$ с точками A, D_1, \dots, D_n (рис. 3.3) в задаче оптимизации с ограничениями.

На рис. 3.3 пунктиром показан участок компромиссной кривой $S(X)$, построенный между точками A и B без учета ограничения. Точка D_1 является точкой пересечения кривой $S(X)$ с границей области D , а точка \tilde{D}_n является точкой касания уровня $f_2(X) = \text{const}$ с границей области D .

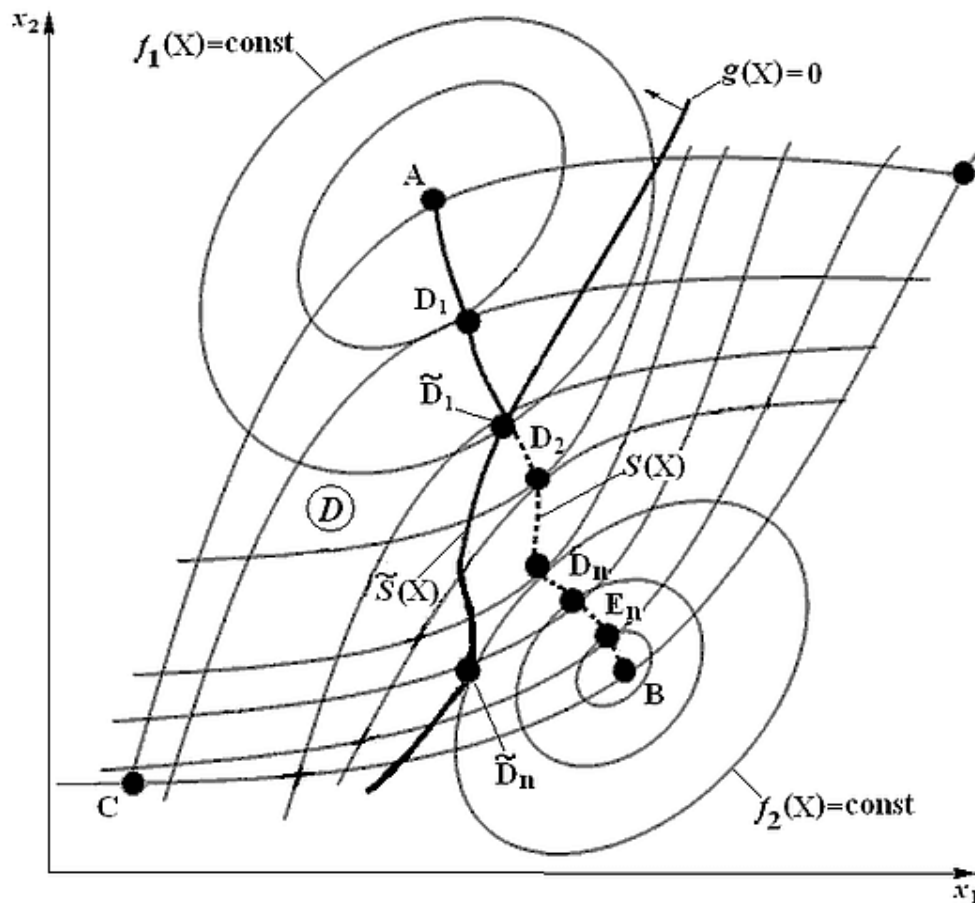


Рис. 3.3. Область решений, оптимальных по Парето

В общем случае область наилучших компромиссных решений называют **областью решений, оптимальных по Парето** (кривые $S(X)$, $\tilde{S}(X)$).

Оптимальность по Парето векторного критерия эффективности $F(X)$ означает, что нельзя улучшить значение одного из частных скалярных критериев эффективности, не ухудшая значения остальных.

Для определения оптимума по Парето необходимо перейти от задачи векторной оптимизации к задаче оптимизации со специально сконструированной функцией цели:

$$C(X) = C[f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X)],$$

т.е. к **свертыванию векторного критерия оптимальности**.

3.3. Построение целевой функции с учетом нескольких критериев эффективности

Критерии эффективности $f_i(X)$ ($i = 1, 2, \dots, k$), входящие в вектор критериев эффективности $F(X)$ в общем случае могут быть *противоречивыми*. Это значит, что по своему физическому смыслу некоторые критерии следует минимизировать, а другие максимизировать.

Эта проблема легко разрешается, если ввести знак минус у соответствующих критериев. Тогда вектор $F(X)$ можно сформулировать из непротиворечивых критериев.

Пусть, например, $f_1(X)$ – функция массы аппарата, $f_2(X)$ – функция полезного объема аппарата. Это противоречивые критерии. Критерий массы аппарата минимизируется при проектировании, критерий полезного объема требует максимального значения. Если же вместо функции $f_2(X)$ рассматривать функцию $-f_2(X)$, то получим вектор непротиворечивых критериев эффективности:

$$F(X) = (f_1(X), -f_2(X)).$$

Существуют различные подходы к решению многокритериальных задач параметрической оптимизации.

Для конструирования скалярной функции цели $S(X)$ необходимо предварительно оценить оптимальные решения, полученные в результате решения задач по каждому критерию эффективности $f_i(X)$, входящему в вектор-функцию $F(X)$.

Оптимизация по одному критерию $f_i(X)$ называется *субоптимизацией*. В результате последовательной субоптимизации получим множество значений критериев эффективности $\{f_1(X_1^*), f_2(X_2^*), \dots, f_k(X_k^*)\}$, соответствующее множеству субоптимальных точек.

При анализе субоптимальных решений возникает проблема упорядочения по важности частных критериев. Эта задача может быть неформально на основе экспертных оценок специалистов.

Если задача упорядочения множества $\{f_1(X_1^*), f_2(X_2^*), \dots, f_k(X_k^*)\}$ по важности частных критериев

решена, то первый критерий $f_1(X)$, как наиболее важный, можно принять за целевую функцию. На остальные же критерии эффективности накладываются ограничения.

В этом случае поиск эффективного решения можно свести к задаче *математического программирования* – поиску точки X^* , для которой выполняется условие

$$C(X^*) = \operatorname{opt}_{X \in \tilde{D}} f_1(X),$$

где $\tilde{D} = D \cap D_f$,

$$D = \{X : \varphi_k(X) \leq 0, a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m\},$$

$$D_f = \{X : f_i^- \leq f_i(X) \leq f_i^+, i = 2, \dots, k\}.$$

3.4. Аддитивные методы свертывания вектора критериев эффективности

Аддитивный критерий объединяет (свертывает) все критерии эффективности в одну целевую функцию, представляющую собой взвешенную сумму критериев эффективности

Пусть определены безразмерные параметры α_i , ($i = 1, 2, \dots, k$), численно характеризующие важность критериев эффективности $f_j(X)$.

Параметры α_i называют **весовыми коэффициентами** (степенью полезности или весом i -го критерия эффективности).

При формировании целевой функции целесообразно предварительно критерии эффективности привести к безразмерному виду. Параметры α_i тогда также следует принять безразмерными.

В этом случае целевая функция может быть сконструирована в виде:

$$C(X) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f_i(X) / f_i(X^*),$$

где $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots, k)$.

Очевидно, что в этом случае критерием оптимальности будет

$$C(X) = \max, (\min C(X) \geq 1),$$

если требуется минимизация по каждому из параметров.

В некоторых случаях при конструировании целевой функции можно наоборот учитывать относительные потери критериев эффективности. При этом целевая функция $C(X)$, которую следует минимизировать, будет иметь вид:

$$C(X) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot [f_i(X) / f_i(X^*) - 1], (\min C(X) \geq 0).$$

Если вопрос важности критериев эффективности не решен, и весовые коэффициенты назначить затруднительно, то целевую функцию $C(X)$ можно принять в форме

$$C(X) = \sum_{i=1}^k [f_i(X) / f_i(X^*) - 1].$$

Пример

Пусть в качестве критерия эффективности $f_1(X)$ принята функция веса, а в качестве $f_2(X)$ – функция стоимости. На рис. 3.4 показаны уровни функций $f_1(X)$, $f_2(X)$ и компромиссная кривая (область решений, оптимальных по Парето).

Составим скалярную функцию цели:

$$C(X) = [f_1(X) / f_1(X_A) - 1] + [f_2(X) / f_2(X_B) - 1].$$

Значения целевой функции согласно данным рис. 3.4:

$$C(X_A) = \frac{2}{3}, C(X_C) = 5\frac{1}{3}, C(X_B) = 9.$$

Следовательно, в данном случае $C(X^*) = C(X_A) = \frac{2}{3}$. В качестве оптимальной точки принимаем точку А. Это значит, что критерий эффективности $f_1(X)$ в данном случае более чувствителен к изменению в пределах компромиссной кривой. Следовательно, критерий массы в данном случае более важен.

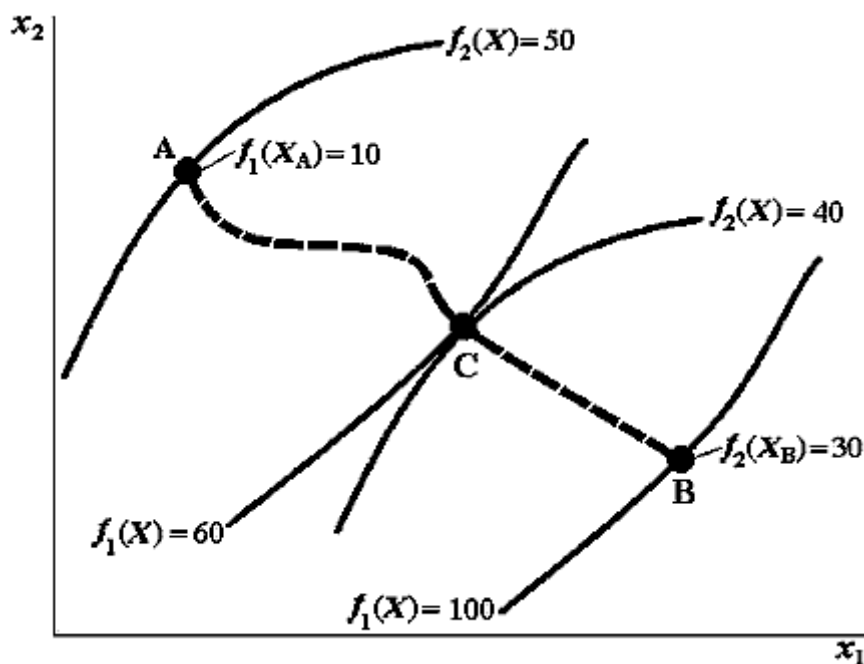


Рис. 3.4. Поиск оптимального решения

3.5. Мультипликативные методы свертывания вектора критериев эффективности

Мультипликативный метод свертывания вектора критерия эффективности базируется на принципе справедливой компенсации относительных изменений частных критериев. В простейшем случае, когда частные критерии эффективности имеют одинаковый вес, мультипликативный критерий образуется путем простого перемножения частных критериев:

$$C(X) = f_1(X) \cdot f_2(X) \cdot \dots \cdot f_n(X).$$

В случае неравноценности частных критериев вводятся весовые коэффициенты c_i . Вес критериев, как правило, определяется экспертным методом. При этом сумма весовых коэффициентов должна быть равна единице, а каждый из весовых коэффициентов должен быть неотрицательной величиной. Мультипликативный критерий принимает вид произведения частных критериев, каждый из которых возведен в соответствующую степень:

$$C(X) = f_1^{c_1}(X) \cdot f_2^{c_2}(X) \cdot \dots \cdot f_n^{c_n}(X), \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Концепция оптимальности (принцип относительной компенсации): относительное уменьшение значения одного из критериев может быть скомпенсировано произведением относительных увеличений значений других критериев.

Простейший вариант свертывания вектора критериев эффективности по мультипликативному методу:

$$C(X) = \prod_{i=1}^m f_i(X) / \prod_{j=m+1}^k f_j(X), \quad m \leq k.$$

Здесь $f_i(X)$, ($i = 1, 2, \dots, m$) – критерии эффективности, которые необходимо максимизировать;

$f_j(X)$, ($j = m+1, m+2, \dots, k$) – критерии эффективности, которые необходимо минимизировать.

В этом случае критерий оптимальности: $C(X) = \max$.

4. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К методам *одномерной оптимизации* относятся методы дихотомического деления, золотого сечения, чисел Фибоначчи, полиномиальной аппроксимации и ряд их модификаций.

4.1. Метод дихотомического деления

Рассмотрим отрезок $[A, B]$, на котором целевая функция имеет один минимум (в общем случае может быть нечетное число минимумов). Применяя *метод дихотомического деления* (рис. 4.1, а) делим отрезок $[A, B]$ пополам и в точках, отстоящих от центра C отрезка на величину допустимой погрешности ε , определяем значения целевой функции $F(C + \varepsilon)$ и $F(C - \varepsilon)$. В случае $F(C + \varepsilon) > F(C - \varepsilon)$, минимум целевой функции находится на отрезке $[A, C]$, если $F(C + \varepsilon) < F(C - \varepsilon)$, минимум находится на отрезке $[C, B]$, если $F(C + \varepsilon) = F(C - \varepsilon)$ – на отрезке $[C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. На следующем шаге вместо отрезка $[A, B]$ исследуем один из отрезков $[A, C]$, $[C, B]$ или $[C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. Шаги повторяем, пока длина очередного исследуемого отрезка не уменьшится до величины допустимой погрешности ε . На каждом шаге целевую функцию приходится вычислять дважды. В результате потребуется не более N шагов, где N – ближайшее к числу $\log \frac{B - A}{\varepsilon}$ целое значение.

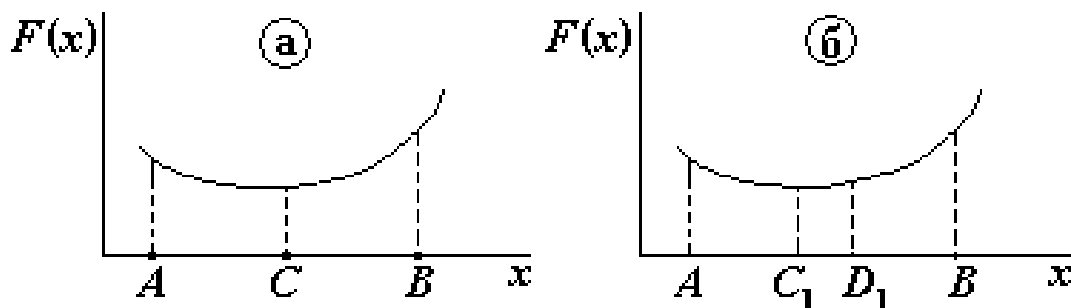


Рис. 4.1. Одномерная минимизация:
а – дихотомическое деление; б – золотое сечение

4.2. Метод золотого сечения

Применяя *метод золотого сечения* (рис. 4.1, б), на отрезке $[A, B]$ выделяем две промежуточные точки C_1 и D_1 на расстоянии aL от его конечных точек, где $L = B - A$ – длина отрезка. Далее вычисляем значения целевой функции $F(x)$ в точках C_1 и D_1 . В случае $F(C_1) < F(D_1)$, то минимум целевой функции находится на отрезке $[A, B]$. Если окажется, что $F(C_1) > F(D_1)$, то минимум находится на отрезке $[C_1, B]$, если же $F(C_1) = F(D_1)$ – на отрезке $[C_1, D_1]$. Таким образом, на следующем шаге вместо отрезка $[A, B]$ следует рассматривать отрезок $[A, D_1]$, $[C_1, B]$ или $[C_1, D_1]$. Следовательно, длина очередного исследуемого отрезка

уменьшилась не менее чем в $\frac{L}{L-aL} = \frac{1}{1-a}$ раз. Значение пара-

метра a подбираем таким образом, чтобы в полученном отрезке меньшей длины одна из выделяемых промежуточных точек совпала с промежуточной точкой от предыдущего шага, т.е. в случае выбора отрезка $[A, D_1]$ промежуточная точка D_2 должна совпадать с точкой C_1 , а в случае выбора отрезка $[C_1, B]$ промежуточная точка C_2 – с точкой D_1 . Такой выбор параметра a позволит сократить число вычислений целевой функции на всех шагах (кроме первого) в 2 раза.

Требуемое значение параметра a находим из соотношения $(1-2a)L_k = aL_{k-1}$, откуда принимая во внимание, что $\frac{L_k}{L_{k-1}} = \frac{1}{1-a}$, следует $a = 0,382$. Это значение и называют золотым сечением.

Таким образом, для определения минимума целевой функции по методу золотого сечения при допустимой величине погрешности ε потребуется не более N шагов и $N + 1$ вычислений целевой функции, где N определяется соотношением $N = \frac{B-A}{\varepsilon(1-a)}$.

4.3. Метод чисел Фибоначчи

Применяя *метод чисел Фибоначчи*, используем числа Фибоначчи R , последовательность которых определяется алгоритмом

$$R_i = R_{i-1} + R_{i-2}; i = 1, 2, 3, \dots; R_0 = R_1 = 1.$$

Таким образом, последовательность чисел Фибоначчи имеет вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,

Метод чисел Фибоначчи улучшает метод золотого сечения поиска минимума целевой функции. Подобно методу золотого сечения он требует двух вычислений целевой функции на первой итерации и по одному вычислению на каждой последующей. Однако этот метод отличается от метода золотого сечения тем, что коэффициент a является переменной величиной: $a = \frac{R_{i-2}}{R_i}$. При этом R_i должно быть наименьшим числом Фибоначчи, превышающим величину $\frac{B-A}{\varepsilon}$, где ε – заданная допустимая погрешность определения минимума целевой функции. Например, если $\frac{B-A}{\varepsilon} = 100$, то $R_i = 144$. Следовательно, на первом шаге вычислений значение параметра $a = 55 / 144 = 0,3819$. На следующем шаге $a = 34 / 89 = 0,3820$ и т.д.

Кроме того, в отличие от метода золотого сечения в методе Фибоначчи требуется, чтобы общее число вычислений целевой функции N (или коэффициент сокращения исходного интервала) было задано заранее. Длина интервала неопределенности на k -й итерации сжимается с коэффициентом $\frac{R_{N-k}}{R_{N-k+1}}$. После $(N-1)$ -й итерации длина интервала неопределенности сократится от $(B_1 - A_1)$ до $\frac{B_1 - A_1}{R_N}$, где $(B_1 - A_1)$ – длина интервала неопределенности после первой итерации.

4.4. Методы полиномиальной аппроксимации

Применение методов аппроксимации предусматривает приближенную замену целевой функции $P(x)$ на заданном отрезке $[A, B]$ более простой зависимостью $f(x)$:

$$P(x) \approx f(x),$$

причем функция $f(x)$, такова, что в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает те же значения, что и целевая функция $P(x)$. Указанные точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ называются узлами аппроксимации, или просто узлами, а функция $f(x)$ – аппроксимирующей функцией.

В том случае, когда аппроксимирующая функция принадлежит к классу степенных полиномов, аппроксимация называется полиномиальной. Полиномиальная аппроксимация весьма удобна: полиномы просты по форме, легко вычисляются, их легко дифференцировать и интегрировать. Поэтому полиномиальная аппроксимация является весьма распространенной.

Методы полиномиальной аппроксимации можно разделить на две основные группы:

- методы квадратичной аппроксимации;
- методы кубической аппроксимации.

В методах квадратичной аппроксимации в качестве аппроксимирующих полиномов используются полиномы второй степени. Полином второй степени может описать только один минимум или максимум целевой функции.

В методах кубической аппроксимации в качестве аппроксимирующих полиномов применяются полиномы третьей степени. Полином третьей степени имеет один или два экстремума.

Метод полиномиальной аппроксимации заключается в определении полинома, аппроксимирующего целевую функцию (чаще всего – квадратичного полинома) и поиске его экстремума, который является первым приближением к экстремуму аппроксимируемой целевой функции.

Рассмотрим пример поиска экстремума целевой функции методом полиномиальной аппроксимации.

Известно, что на заданном отрезке $[A, B]$ целевая функция $P(x)$ имеет минимум. Требуется найти точку минимума целевой функции и ее значение в этой точке.

В качестве аппроксимирующего полинома целевой функции $P(x)$ на отрезке $[A, B]$ принимаем квадратичный полином

$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2. \quad (4.1)$$

Далее на отрезке $[A, B]$ выбираем промежуточную точку C и в этой точке, а также в конечных точках A и B отрезка $[A, B]$ вычисляем значения целевой функции: $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ (a , b , c – координаты точек A , B , C). Затем последовательно подставляем значения координаты точек A , B , C и вычисленные значения целевой функции $P(x)$ в уравнение (4.1), получая в результате систему уравнений относительно коэффициентов γ_1 , γ_2 , γ_3 аппроксимирующего полинома. Решаем полученную систему уравнений и находим коэффициенты γ_1 , γ_2 , γ_3 .

Для поиска точки x^* минимума целевой функции $P(x)$ используем условие

$$\frac{dP(x)}{dx} = \gamma_1 + 2\gamma_2 x = 0. \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.2) находим приближенное значение координаты точки минимума целевой функции: $x^* = -\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}$.

Приближенное значение минимума целевой функции:

$$P(x^*) = P\left(-\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right).$$

5. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Среди методов оптимизации нулевого порядка в САПР находят применение метод покоординатного спуска, метод вращающихся координат (метод Розенброка), а также методы случайного поиска. К методам с использованием производных относится метод наискорейшего спуска.

5.1. Метод покоординатного спуска

Метод покоординатного спуска характеризуется выбором направлений поиска поочередно вдоль всех n координатных осей. Величина шага определяется на основе одномерной оптимизации, критерий окончания поиска $|X_k - X_{k-1}| < \varepsilon$, где ε – заданная точность определения локального экстремума. Траектория покоординатного спуска для примера двумерного пространства управляемых параметров показана на рис. 5.1, где X_k – пробные точки на траектории поиска; x_1, x_2 – управляемые параметры.

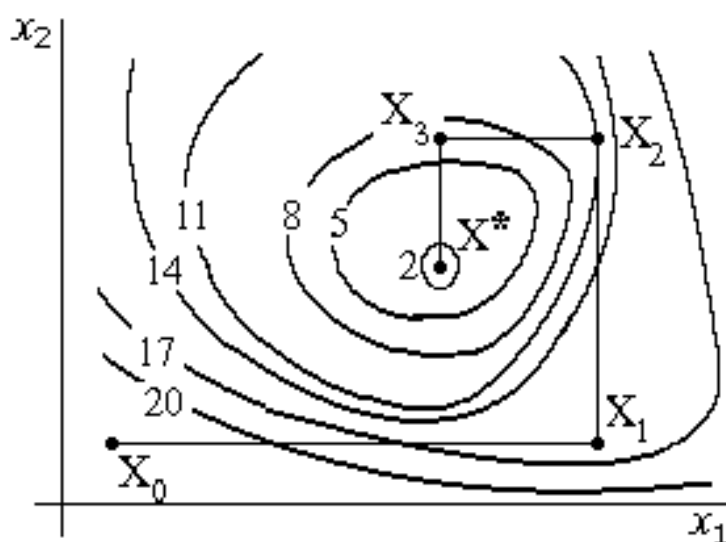


Рис. 5.1. Траектория покоординатного спуска

Целевая функция представлена линиями равного уровня, около каждой линии записано соответствующее ей значение $S(X)$. Очевидно, что X^* есть точка минимума.

При использовании метода покоординатного спуска велика вероятность остановки поиска на дне **оврага** вдали от точки экстремума. На рис. 5.2 видно, что после попадания в точку **A**, расположенную на дне оврага, дальнейшие шаги возможны лишь в направлениях **aa** или **bb**, но они приводят к ухудшению целевой функции. Следовательно, поиск прекращается в точке **A**.

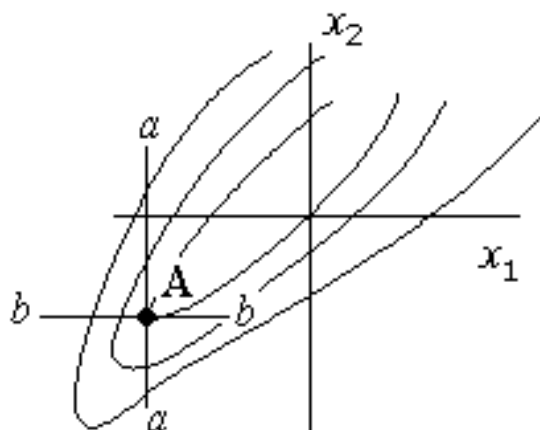


Рис. 5.2. Остановка покоординатного спуска на дне оврага

В то же время при благоприятной ориентации дна оврага, а именно при положении одной из координатных осей, близком к параллельности с дном оврага, поиск оказывается весьма быстрым. Эта ситуация показана на рис. 5.3.

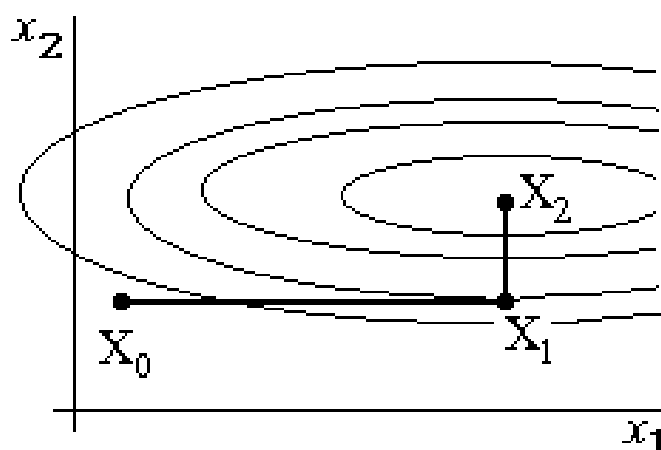


Рис. 5.3. Траектория покоординатного спуска при благоприятной ориентации координатных осей

5.2. Метод вращающихся координат (метод Розенброка)

Метод вращающихся координат является улучшенным вариантом покоординатного спуска и заключается в таком повороте координатных осей в соответствии с изменением скорости убывания целевой функции, чтобы одна из них оказалась квазипараллельной дну оврага. Такой поворот осуществляют на основе данных, полученных после серии из n шагов покоординатного спуска. Новые направления координатных осей s_i получают линейным преобразованием прежних осей x_i таким образом, чтобы ось s_1 соответствовала направлению наиболее быстрого убывания целевой функции. Направления остальных координатных осей находят из условия ортогональности к оси s_1 и друг к другу.

5.3. Методы случайного поиска

Методы случайного поиска характеризуются тем, что направления поиска выбирают случайным образом.

5.4. Метод наискорейшего спуска

Особенностью *метода наискорейшего спуска* является выполнение шагов поиска в градиентном направлении

$$X_{k+1} = X_k + h_k \frac{\text{grad } C(X_k)}{|\text{grad } C(X_k)|}.$$

Шаг h_k выбирается оптимальным с помощью одномерной оптимизации.

При использовании метода наискорейшего спуска, как и большинства других методов, эффективность поиска существенно снижается в овражных ситуациях. Траектория поиска приобретает зигзагообразный вид с медленным продвижением вдоль дна оврага в сторону экстремума.

6. МЕТОДЫ ПОИСКА УСЛОВНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ

6.1. Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа, ориентирован на поиск экстремума при наличии ограничений типа равенств $\psi(X) = 0$, т.е. на решение задачи

$$\text{extr}_{X \in R} C(X), \quad (6.1)$$

где $R = \{X \mid \psi(X) = 0\}$.

Суть метода заключается в преобразовании задачи *условной оптимизации* (6.1) в задачу *безусловной оптимизации* с помощью образования новой целевой функции

$$\Phi(X, \Lambda) = C(X) + \sum_{i=1}^L \lambda_i \psi_i(X),$$

где $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L)$ – вектор множителей Лагранжа, L – число ограничений.

Необходимые условия экстремума функции $\Phi(X)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(X, \Lambda)}{\partial X} &= \frac{\partial F(X)}{\partial X} + \sum_{i=1}^L \lambda_i \frac{\partial \psi_i(X)}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(X, \Lambda)}{\partial \Lambda} &= \psi(X) = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Система (6.2) содержит $n + L$ алгебраических уравнений, где n – размерность пространства управляемых параметров, ее решение дает искомые координаты экстремальной точки и значения множителей Лагранжа. Однако при численном решении системы (6.2), что имеет место при использовании *алгоритмических моделей*, возникают вычислительные трудности. Поэтому в САПР основными методами решения задач математического программирования являются методы штрафных функций и проекции градиента.

6.2. Методы штрафных функций

Основная идея *методов штрафных функций* – преобразование задачи условной оптимизации в задачу безусловной оптимизации путем формирования новой целевой функции $\Phi(X)$ включением в исходную целевую функцию $C(X)$ специальным образом выбранной *функции штрафа* $S(X)$:

$$\Phi(X) = C(X) + rS(X),$$

где r – множитель, значения которого можно изменять в процессе оптимизации.

Среди методов штрафных функций различают методы внутренней и внешней точки. Согласно методам внутренней точки (иначе называемым методами барьерных функций), исходную для поиска точку можно выбирать только внутри допустимой области, а для методов внешней точки как внутри, так и вне допустимой области. Ситуация появления барьера у новой целевой функции $\Phi(X)$ и соотношение между условным в точке x_2 и безусловным в точке x_1 минимумами исходной целевой функции $C(X)$ в простейшем одномерном случае иллюстрируется рис. 6.1.

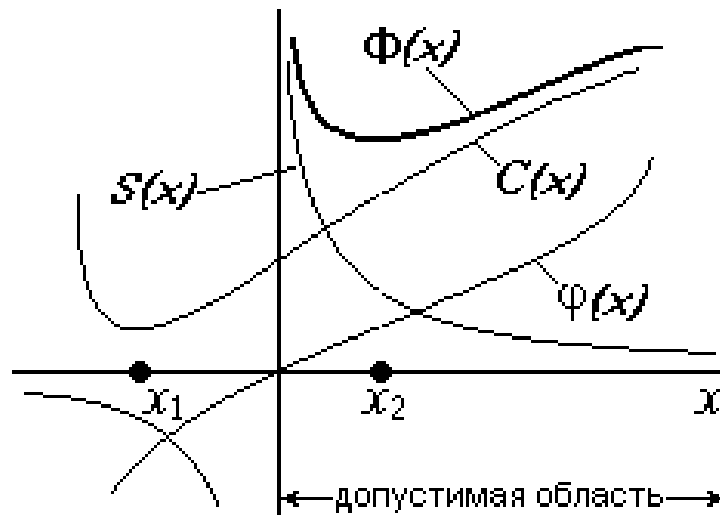


Рис. 6.1. Метод штрафных функций

Примеры штрафных функций

1. Для метода внутренней точки при ограничениях $\varphi_i(X) > 0$:

$$S(X) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varphi_i(X)},$$

где m – число ограничений типа неравенств.

2. Для метода внешней точки при таких же ограничениях:

$$S(X) = \sum_{i=1}^m \left(\min \{0, \varphi_i(X)\} \right)^2.$$

Здесь штраф сводится к включению в целевую функцию $\Phi(X)$ суммы квадратов активных (т.е. нарушенных) ограничений.

3. В случае ограничений типа равенств $\psi_i(X) = 0$:

$$S(X) = \sum_{i=1}^L \left(\psi_i(X) \right)^2.$$

Чем больше коэффициент r , тем точнее решение задачи, однако при больших r может ухудшаться ее обусловленность. Поэтому в начале поиска обычно выбирают умеренные значения r , увеличивая их в окрестностях экстремума.

6.3. Метод проекции градиента

Основной вариант *метода проекции градиента* ориентирован на задачи *математического программирования* с ограничениями типа равенств.

Поиск при выполнении ограничений осуществляется в подпространстве $(n - m)$ измерений, где n – число управляемых параметров, m – число ограничений, при этом движение осуществляется в направлении проекции градиента целевой функции $F(X)$ на гиперплоскость, касательную к гиперповерхности ограничений.

Поиск минимума начинают со спуска из исходной точки на гиперповерхность ограничений. Далее выполняют шаг в указанном выше направлении (шаг вдоль гиперповерхности ограничений). Поскольку этот шаг может привести к заметному нарушению ограничений, вновь повторяют спуск на гиперповерхность ограничений и т.д. Таким образом, поиск заключается в выполнении пар шагов, каждая пара включает спуск на гиперповерх-

ность ограничений и движение вдоль гиперповерхности ограничений.

Идею метода легко пояснить для случая поиска в двумерном пространстве при одном ограничении $\psi(X) = 0$. На рис. 6.2 это ограничение представлено жирной линией, а целевая функция – совокупностью более тонких линий равного уровня. Спуск обычно осуществляют по нормали к гиперповерхности ограничений (в данном случае к линии ограничения). Условие окончания поиска основано на сопоставлении значений целевой функции в двух последовательных точках, получаемых после спуска на гиперповерхность ограничений.

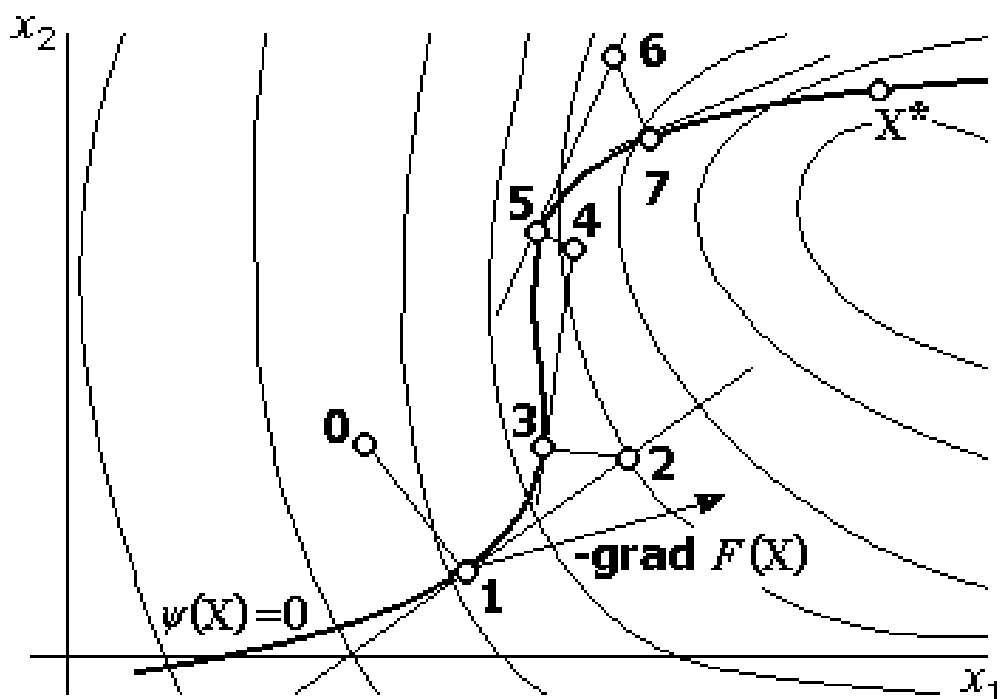


Рис. 6.2. Траектория поиска по методу проекции градиента

7. МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Задачи оптимального проектирования в машиностроении являются, как правило, многопараметрическими и многоэкстремальными задачами глобальной минимизации при наличии прямых и функциональных ограничений. Такие задачи могут быть решены только численными методами, поскольку целевая функция и функции ограничений заданы весьма сложными алгоритмами. Из опыта проектирования изделий машиностроения известно, что гиперповерхность отклика функции цели, как правило, многоэкстремальна и имеет «овражную» структуру. Общие методы решения таких задач оптимизации разработаны еще недостаточно.

В разделе 6 было показано, как условно-экстремальная задача может быть сведена к безусловной, и приведены методы поиска глобального минимума функций. Однако эти методы позволяют найти эффективное решение только в случае унимодальной целевой функции. В случае же многоэкстремальных оптимизационных задач результат решения существенно зависит от выбора начальной точки поиска, с помощью градиентных методов не всегда удастся отыскать глобальный минимум целевой функции.

Для решения задач оптимального проектирования применяют методы *поисковой оптимизации*. Поиск цели – оптимальной точки в пространстве управляемых параметров – осуществляют последовательными шагами, ведущими от начальной точки поиска $X_{\text{нач}}$ через некоторые промежуточные точки X_k , в окрестность точки минимума X^* . Стратегия выбора точек X_k может быть различной и зависит от применяемого метода поиска минимума целевой функции.

Далее рассматриваются некоторые подходы к решению условных многоэкстремальных задач: ненаправленное сканирование на детерминированной сетке, случайный ненаправленный поиск (метод Монте-Карло), направленное сканирование на детерминированной сетке с использованием равномерно распределенных последовательностей пробных точек.

7.1. Метод ненаправленного сканирования

Метод *ненаправленного сканирования* представляет собой методически простейший путь решения экстремальной задачи. Этот метод сводится к полному перебору всех возможных вариантов сочетаний управляемых параметров, задаваемых узлами пространственной детерминированной сетки, с выбором точки X^* по наилучшему значению целевой функции $C^* = C(X^*)$ из множества всех допустимых решений в заданной области поиска:

$$\Pi = \{X : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}.$$

При решении задач на ЭВМ каждый непрерывно изменяемый (управляемый) параметр x_i ($i = 1, \dots, n$) представляется в виде дискретного множества

$$\{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k}, \dots, x_{i,r_i}\} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Общее число возможных вариантов сочетаний управляемых параметров равно

$$N = \prod_{i=1}^n r_i$$

где r_i – число узлов на длине интервала $l_i = b_i - a_i$. Как правило, обход узлов пространственной детерминированной сетки имеет циклический характер и упорядочен (в процессе перебора этот порядок не изменяется). При $n \geq 2$ одни циклы находятся внутри других (рис. 7.1).

Метод ненаправленного сканирования имеет ряд достоинств: простоту поисковой процедуры на ЭВМ, возможность (при мелкой сетке) отыскания с заданной точностью глобального экстремума, возможность работать не только с непрерывными, но и дискретными параметрами. Может служить основой для проверки любого поискового алгоритма, дает возможность полного исследования свойств экстремальной задачи. Метод сканирования работает с использованием критерия точности по управляемым параметрам.

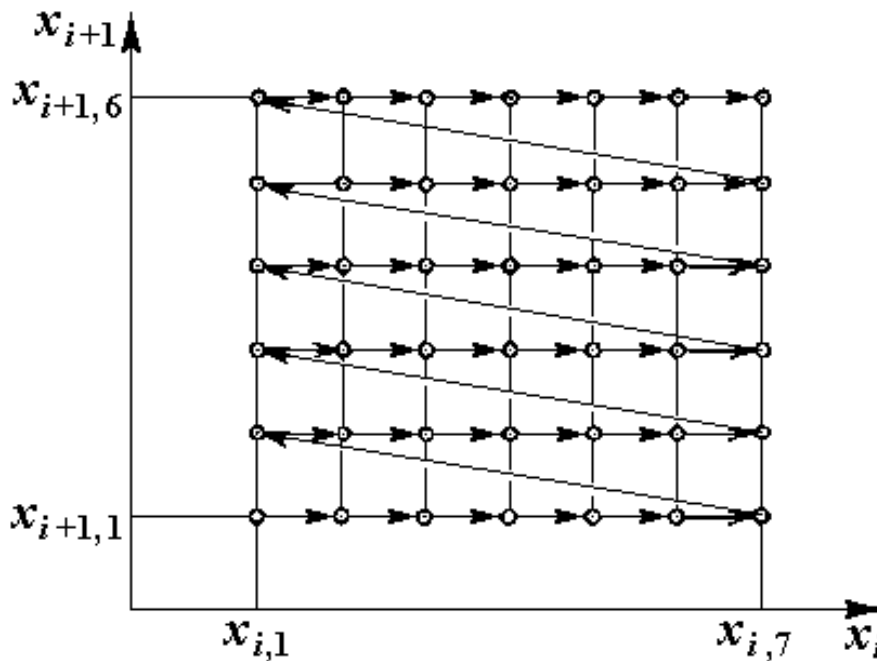


Рис. 7.1. Метод ненаправленного сканирования

Основным недостатком метода ненаправленного сканирования является его крайняя неэффективность. Поэтому практически он не может быть использован для задач с большим числом управляемых параметров. Так, для решения экстремальной задачи размерностью $n = 10$ методом сканирования при числе узлов $r_i = 10$ ($i = 1, \dots, n$), т. е. на каждом интервале $[a_i, b_i]$ принято 10 узлов, общее число вариантов N_0 составляет 10^{10} . Пусть ЭВМ способна проанализировать за 1 секунду один вариант проектного решения. Тогда для решения поставленной задачи потребуется 317 лет непрерывной работы ЭВМ.

7.2. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)

Метод статистических испытаний при решении экстремальных задач сводится к последовательному анализу целевой функции $C(X)$ в случайных точках, что приводит к случайному (ненаправленному) блужданию в области поиска (рис. 7.2). Распределение случайных точек может быть принято равномерным или неравномерным.

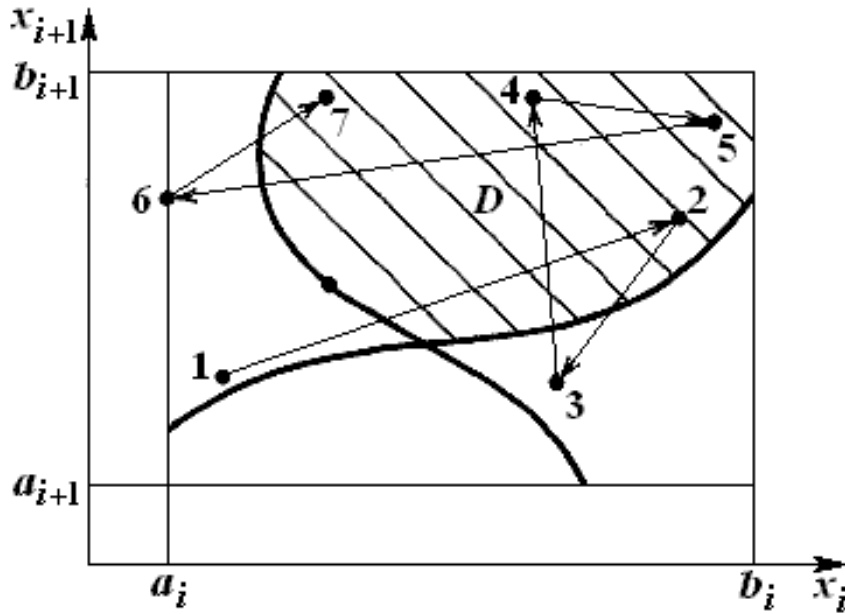


Рис. 7.2. Метод статистических испытаний

Рассмотрим схему решения условно-экстремальной задачи методом Монте-Карло. Пусть требуется найти точку \tilde{X}^* , чтобы

$$C(\tilde{X}^*) = \min_{X \in \tilde{D}} C(X),$$

$$\tilde{D} = \left\{ X : \varphi_l(X) = 0, g_k(X) \leq 0, a_i \leq x_i \leq b_i, N \leq N_{\text{доп}} \right\}$$

$$(l = 1, \dots, s; k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n),$$

где $N_{\text{доп}}$ – заданное (допускаемое) число испытаний.

Для получения случайной точки в области поиска $X \in \Pi$ можно использовать формулу

$$x_i = a_i + \xi_i (b_i - a_i), (i = 1, \dots, n),$$

где ξ_i – псевдослучайное число ($\xi_i \in [0, 1]$) с заданным законом распределения.

Для задач поиска точки X^* минимума целевой функции $C(X)$ при отсутствии дополнительной информации об экстремальной задаче целесообразно принимать последовательность псевдослучайных чисел с равномерным законом распределения в интервале $[0, 1]$. Для каждой X_γ -точки ($\gamma = 1, 2, \dots, N$) вычисляются значения целевой функции $C(X_\gamma)$ и значения функций ограничений $\varphi_l(X_\gamma)$ и $g_k(X_\gamma)$.

В ходе анализа вариантов отбрасываются недопустимые решения, а из допустимых решений выбирается точка с наилучшим значением целевой функции $C(X)$.

Результат, полученный по методу Монте-Карло, может быть охарактеризован вероятностью p того, что при данном числе N случайных испытаний расположение точки оптимума будет определено с точностью до α ($0 < \alpha < 1$), где α – доля «объема» V^* n -мерного параллелепипеда в окрестности точки минимума в долях от общего «объема» V области поиска Π . Здесь

$$V = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i), \text{ т.е. } V^* = \alpha V.$$

Разобьем весь «объем» V на элементарные «объемы» V^* . Тогда вероятность попадания для одного испытания будет равна

$$\tilde{p}_1 = V^* / V = \alpha$$

Вероятность промаха при одном испытании будет

$$p_1 = 1 - \tilde{p}_1 = 1 - \alpha, \quad 0 < p_1 < 1.$$

Вероятность промаха при N испытаниях (при условии независимости испытаний) составит

$$p_N = \prod_{\gamma=1}^N p_\gamma = (1 - \alpha)^N.$$

Тогда можно вычислить вероятность попадания в окрестность оптимума при N случайных независимых испытаниях по формуле

$$p = 1 - p_N, \quad 0 < p < 1.$$

Из этой формулы получается выражение для определения числа случайных испытаний (проб), необходимых для того, чтобы с заданной вероятностью p расположение точки X_γ в окрестности точки X^* определялось с точностью α :

$$N = \ln(1 - p) / \ln(1 - \alpha). \quad (7.1)$$

Из выражения (7.1) видно, что $N(\alpha_2) < N(\alpha_1)$, если $\alpha_2 > \alpha_1$, т.е. при заданной вероятности p при большей точности поиска экстремума (меньшем значении α) требуется большее число N статистических испытаний.

Пусть задана точность поиска экстремума по каждой i -й координате: $\Delta x_i = \varepsilon_i (b_i - a_i)$, где ε_i – заданная величина;

Тогда

$$\alpha = \prod_{i=1}^n \Delta x_i / \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad 0 < \varepsilon_i < 1.$$

Если $\varepsilon_i = \varepsilon = \text{const}$, то получим $\alpha = \varepsilon^n$ и формула (1) примет вид

$$N = \ln(1 - p) / \ln(1 - \varepsilon^n). \quad (7.2)$$

Из соотношения (7.2) видно, что, сохраняя значение $\varepsilon = \text{const}$ для задач различной размерности n , получим существенный рост значения N с ростом размерности n .

Метод Монте-Карло для решения экстремальных задач весьма просто реализуется на ЭВМ, но для получения с большой вероятностью ($p \rightarrow 1$) и с заданной точностью оптимальной точки X^* при большом числе переменных требуется много испытаний, что в большинстве случаев делает метод практически неприменимым.

7.3. Метод направленного сканирования

Метод направленного сканирования основан на использовании равномерно распределенных в пространстве проектирования последовательностей пробных точек X_k , ведущих от начальной точки поиска $X_{\text{нач}}$ в окрестность точки минимума целевой функции X^* .

Рассмотрим единичный куб K^n в n -мерном пространстве, состоящий из точек X с декартовыми координатами x_1, x_2, \dots, x_n ($0 \leq x_i \leq 1$). Пусть $\{X_i\}, (i = \overline{1, N})$ – произвольная последовательность точек, принадлежащих K^n . Последовательность $\{X_i\}$ называют *равномерно распределенной* в K^n , если для любой области $G \subset K^n$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(G)}{N} = V(G),$$

где $S_N(G)$ – количество точек последовательности $\{X_i\}$, принадлежащих области G ; $V(G)$ – объем области G .

Геометрический смысл этого определения заключается в том, что при всех достаточно больших N количество точек X_1, X_2, \dots, X_N , принадлежащих области $G \subset K^n$, приближенно пропорционально объему этой области:

$$S_N(G) \cong NV(G). \quad (7.3)$$

Среди известных в настоящее время распределенных последовательностей наилучшей равномерностью обладают ЛП $_{\tau}$ -последовательности [11]. ЛП $_{\tau}$ -последовательности обладают тем свойством, что проекции их точек на любую координатную ось в пространстве управляемых параметров различны и равномерно расположены. Таким образом, выбрав N пробных точек, мы придаем каждому из управляемых параметров N различных и равномерно расположенных во всем диапазоне его изменения значений, так что **количество пробных значений** для каждого параметра равно **количеству испытаний** системы

Рис. 7.3 поясняет ситуацию на примере двухмерного пространства.

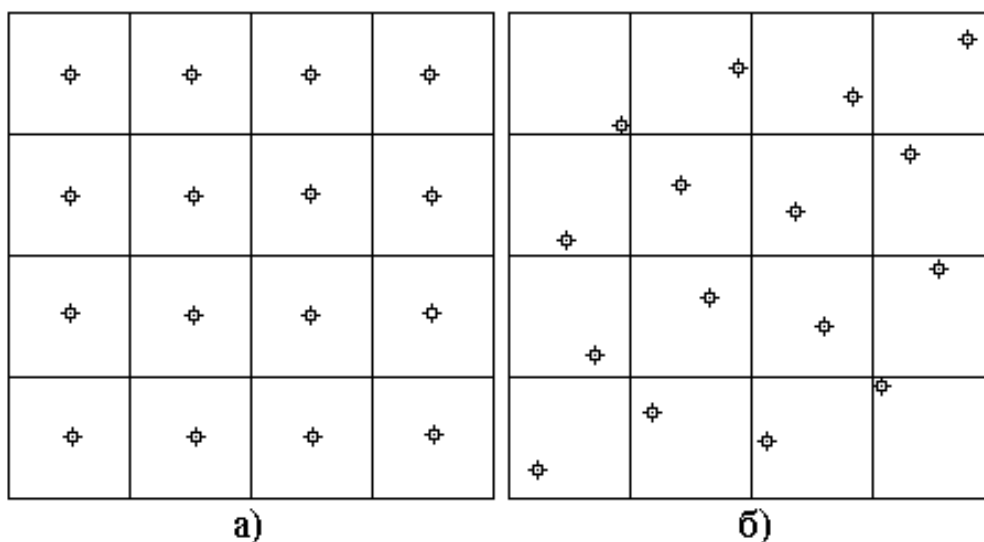


Рис. 7.3. Зондирование пространства проектирования с помощью пробных точек

На рис. 7.3, *а* пробные точки образуют равномерную детерминированную сетку. На рис. 7.3, *б* показана ЛП_τ-последовательность точек, которая так же, как и равномерная последовательность, содержит по одной пробной точке в каждом из 16 квадратов, но проекции этих точек на оси координат различны и равномерно распределены.

Такой выбор пробных точек обеспечивает равномерное сканирование пространства управляемых параметров при ограниченном количестве испытаний и, следовательно, существенно повышает эффективность процесса поиска оптимума. Эффективность применения ЛП_τ-последовательности для решения задач оптимизации резко возрастает с увеличением размерности пространства управляемых параметров.

8. МЕТОДЫ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ПОИСКА С ЗАПРЕТАМИ

8.1. Метод локальной оптимизации

Среди приближенных методов решения задач дискретного *математического программирования* и задач *структурного синтеза* часто используется *метод локальной оптимизации*. Так как пространство D метризуемо, можно использовать понятие α -окрестности $S_\alpha(X_k)$ текущей точки поиска X_k . Вместо перебора точек во всем пространстве D осуществляется перебор только в области $S_\alpha(X_k)$. Если $C(X_k) < C(X_j)$ для всех $X_j \in S_\alpha(X_k)$, считается, что найден локальный минимум целевой функции в точке X_k . В противном случае точку $X_q \in S_\alpha(X_k)$, где $C(X_q) < C(X_k)$, принимают в качестве новой текущей точки поиска.

8.2. Метод поиска с запретами

Недостатком метода локальной оптимизации является его явно выраженная локальность – процесс поиска в некоторых случаях не может выйти за пределы окрестности назначенного локального экстремума. Повысить эффективность поиска можно с помощью *метода поиска с запретами*. Для этого в области $S_\alpha(X_k)$ вводят запреты на попадание в некоторые точки. Обычно это запреты на повторное исследование точек, пройденных на нескольких последних шагах оптимизации. Запрет распространяется и на лучшую точку X_k предыдущего шага, которая может оказаться точкой локального минимума. Тогда на данном шаге перемещение происходит в лучшую незапрещенную точку X_{k+1} , несмотря на то, что $C(X_{k+1}) > C(X_k)$. Тем самым появляется тенденция к выходу из области притяжения локального экстремума.

9. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Эволюционные методы являются приближенными (эвристическими) методами решения задач оптимизации и структурного синтеза. Большинство таких методов основано на статистическом подходе к исследованию ситуаций и итерационном приближении к искомому решению.

Эволюционные вычисления составляют один из разделов искусственного интеллекта. При построении систем искусственного интеллекта по данному подходу основное внимание уделяется построению начальной модели и правилам, по которым она может изменяться (эволюционировать). Причем модель может быть составлена по самым различным методам, например, это может быть и нейронная сеть, и набор логических правил. К основным эволюционным методам относятся методы отжига, генетические, поведения "толпы" (PSO), колонии муравьев (ACO), генетического программирования.

Метод отжига (Simulated Annealing) появился в виде аналогии термодинамического процесса нагревания и медленного охлаждения субстанции для получения кристаллической структуры. Это существенно усовершенствованная версия метода наискорейшего спуска. В методе отжига имитируется процесс минимизации потенциальной энергии тела во время отжига деталей. В текущей точке поиска происходит изменение некоторых управляемых параметров. Новая точка принимается всегда при улучшении целевой функции и лишь с некоторой вероятностью при ее ухудшении.

Начиная со случайно выбранной точки в пространстве поиска, делается шаг в случайном направлении. Если этот шаг приводит в точку с более низким уровнем значения функции оптимизации, то он принимается. Если же он приводит в точку с бóльшим значением функции оптимизации, то он принимается с вероятностью $P(\tau)$, где τ – время. Функция $P(\tau)$ сначала близка к единице, но затем постепенно уменьшается до нуля – по аналогии с охлаждением твердого тела.

Таким образом, в начале процесса моделирования принимаются любые ходы, но, когда «температура» падает, вероятность

совершения негативных шагов уменьшается. Негативные шаги иногда необходимы в том случае, когда нужно избежать локального оптимума, но принятие слишком многих негативных шагов может унести в сторону от глобального оптимума.

Важнейшим частным случаем эволюционных методов являются *генетические методы* и алгоритмы. Генетические алгоритмы (**Genetic Algorithms**) основаны на поиске лучших решений с помощью наследования и усиления полезных свойств множества объектов определенного приложения в процессе имитации их эволюции.

В основе генетических алгоритмов лежит принцип естественного отбора (выживания сильнейшего или наиболее приспособленного). В процессе поиска анализируются сразу несколько ветвей эволюции.

Применяя так называемую «функцию приспособленности», определяющую насколько хорошо найденное решение проблемы и выполняющую роль окружающей среды при моделировании эволюционного процесса, генетические алгоритмы «выращивают» новые популяции объектов, генная структура которых более приспособлена к текущей ситуации. Таким образом, генетическая модель имитирует эволюцию приспособления через механизмы изменчивости объектов.

Свойства объектов представлены значениями параметров, объединяемых в запись, называемую в эволюционных методах *хромосомой*. В генетических алгоритмах оперируют подмножеством хромосом, называемом *популяцией*. Имитация генетических принципов – вероятностный выбор родителей среди членов популяции, скрещивание их хромосом, отбор потомков для включения в новые поколения объектов на основе оценки целевой функции – ведет к эволюционному улучшению значений целевой функции (функции полезности) от поколения к поколению.

Эволюционное программирование (Evolutionary Programming) – подход, основанный на тех же принципах, что и генетические алгоритмы, но содержащий больше эвристических зависимостей и основанный на ранжированных мутациях, применяется в ряде комбинаторных и оптимизационных задач, в задачах машинного обучения.

Эволюционные стратегии (Evolution Strategies) – тоже эволюционный подход, использующий при конструировании струк-

туры индивида адаптивный уровень *мутации*, что позволяет приспособиться к любой переменной модели. Также применяется в области комбинаторики, экспертных системах и при машинном обучении.

Среди эволюционных методов находят применение также методы, которые в отличие от генетических алгоритмов оперируют не множеством хромосом, а единственной хромосомой. Так, метод дискретного *локального поиска* (его англоязычное название Hillclimbing) основан на случайном изменении отдельных параметров (т.е. значений полей в записи или, другими словами, значений *генов* в хромосоме). Такие изменения называют *мутациями*. После очередной мутации оценивают значение функции полезности F (Fitness Function) и результат мутации сохраняется в хромосоме только, если функция F улучшилась.

В методе *PSO* (Particles Swarm Optimization) имитируется поведение множества агентов, стремящихся согласовать свое состояние с состоянием наилучшего агента.

Метод колонии муравьев (ACO) основан на имитации поведения муравьев, минимизирующих длину своих маршрутов на пути от муравьиной кучи до источника пищи.

В последние годы активным полем для исследований стала **топологическая оптимизация**. Методы топологической оптимизации не требуют определения управляемых параметров в явном виде. Параметром оптимизации является функция распределения материала по объему конструкции. Топологическая оптимизация предлагает математическую основу для определения оптимального распределения материала в заданной области проектирования с учетом действующих нагрузок и граничных условий и используется на стадии разработки базового варианта проектируемой конструкции. Главная идея топологической оптимизации заключается в оптимальном расположении материала в заранее заданном объеме для минимизации или максимизации целевой функции (массы, перемещения или жесткости) и удовлетворения функциональным ограничениям, таким как максимальное допустимое значение напряжения, массы или перемещения.

10. ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ МАШИН

10.1. Постановка задачи

Вращающиеся диски применяются в конструкциях многих машин (газотурбинных двигателей, компрессоров, распылительных сушилок, паровых турбин и др.), где работают в жестких условиях эксплуатации. Кроме инерционных сил, возникающих при вращении, диски находятся в условиях неравномерного нагрева, который приводит к возникновению высоких температурных напряжений. Выполнение условий прочности и надежности дисков необходимо для обеспечения нестационарных и форсированных режимов работы машин, требуемой длительности жизненного цикла оборудования. В связи с этим разработка методов расчета и оптимального проектирования дисков машин с учетом условий работы и требований прочности, реализованная в виде системы автоматизированного проектирования, является актуальной задачей.

Численные расчеты показывают, что напряжения, возникающие в дисках различного профиля при одних и тех же условиях эксплуатации, могут существенно отличаться по величине. Так, например, уровень напряженного состояния во вращающемся диске постоянной толщины оказывается значительно более высоким по сравнению с напряжениями в диске, толщина которого изменяется вдоль радиуса по гиперболическому закону. В связи с этим, возникает задача о рациональном выборе геометрических параметров профиля диска для заданных параметров нагружения (угловая скорость вращения, рабочая температура диска, силовые нагрузки).

Важной задачей при разработке конструкций современных машин является экономия дефицитных высокопрочных материалов, снижение материалоемкости конструкций при сохранении их работоспособности и надежности. В соответствии с этими требованиями **оптимальной** считаем конструкцию диска **минимальной массы**, при прочих равных условиях удовлетворяющую условиям работоспособности.

В процессе проектирования толщину диска на внутреннем и наружном контурах диска h_0 и $h(b)$, а также диаметр центрального отверстия $2a$ назначаем по конструктивным соображениям, учитывая технологические требования и принимая во внимание технические характеристики проектируемой машины, необходимость надежного крепления рабочих лопаток к ободу и т.п. Если материал диска принят по технологическим и эксплуатационным условиям (и тем самым определен допускаемый уровень напряжений), то конструктор сохраняет определенную свободу действий лишь по отношению к форме профиля диска и может получить конструкцию минимальной массы, назначив соответствующим образом геометрические параметры профиля.

Ограничим профиль диска ломаной линией, проходящей через точки $0, 1, 2, \dots, n-1, n$ (рис. 10.1).

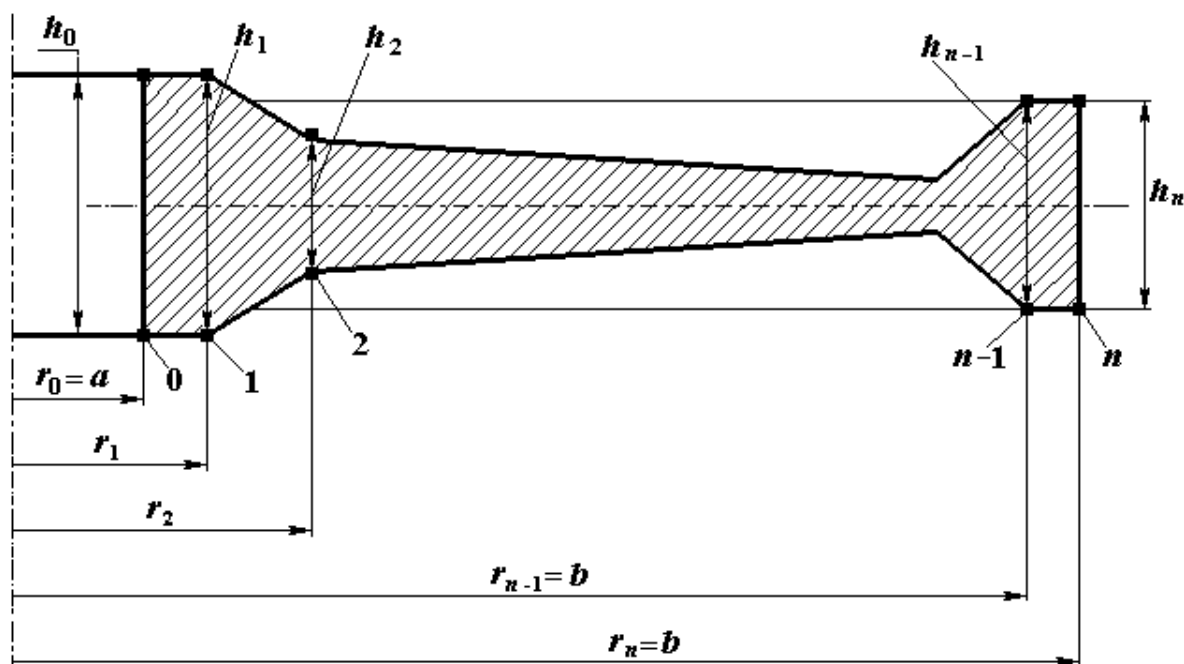


Рис. 10.1. Параметрический синтез профиля диска

Параметрический синтез профиля диска можно осуществить, задавая значения толщины $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n$ в сечениях $r = r_0 = a, r = r_1, r = r_2, \dots, r = r_{n-1}, r = r_n = b$. Толщина диска при этом в остальных сечениях определяется выражением

$$h(r) = h_i + \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i} (h_{i+1} - h_i) \text{ при } r_i \leq r \leq r_{i+1}, \left(i = \overline{0, n-1} \right).$$

Массу диска можно вычислить по формуле

$$M = 2\pi\rho \sum_{i=0}^{n-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left[h_i + \frac{r-r_i}{r_{i+1}-r_i} (h_{i+1} - h_i) \right] r dr =$$

$$= \frac{\pi\rho}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (r_{i+1} - r_i) [h_i (2r_i + r_{i+1}) + h_{i+1} (r_i + 2r_{i+1})]. \quad (10.1)$$

Изменяя в процессе проектирования значения параметров h_1, h_2, \dots, h_{n-1} , получаем различные формы профиля диска. Параметры $h_0 = h(a)$ и $h_n = h(b)$ в соответствии с технологическими требованиями являются фиксированными величинами (*неуправляемыми параметрами*).

Масса диска зависит от параметров $h_0, h_1, h_2, \dots, h_{n-1}, h_n$, при этом, как следует из выражения (10.1), минимум массы соответствует минимуму функции

$$C(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (r_{i+1} - r_i) [h_i (2r_i + r_{i+1}) + h_{i+1} (r_i + 2r_{i+1})].$$

Функция $C(h_1, h_2, \dots, h_{n-1})$ позволяет количественно оценивать эффективность проектных решений и может быть принята в качестве *целевой функции*. *Управляемыми* (изменяемыми в процессе оптимизации) параметрами являются параметры h_1, h_2, \dots, h_{n-1} , определяющие форму профиля диска

Совокупность управляемых параметров h_1, h_2, \dots, h_{n-1} можно представить в виде вектора $\tilde{X} = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$ или точки n -мерного *пространства проектирования*, которое определяется множеством всех возможных (допустимых и недопустимых) проектных решений.

На управляемые параметры накладываем ограничения, связанные с технологическими условиями:

$$h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (10.2)$$

где h_{\min}, h_{\max} – заданные величины. Эти ограничения являются *прямыми* ограничениями.

Область поиска оптимальных проектных решений определяется множеством векторов $\tilde{X} = \{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\}$, удовлетворяющих прямым ограничениям.

Кроме прямых ограничений в рассматриваемой задаче оптимизации конструкции диска ставятся **функциональные** ограничения, связанные с требованиями работоспособности и надежности изделия. Требование выполнения условия прочности диска формулируем в форме ограничения на уровень напряженного состояния:

$$\sigma_i^{\max}(\tilde{X}) - \sigma_{\text{доп}} \leq 0. \quad (10.3)$$

где $\sigma_i^{\max}(\tilde{X})$ – максимальная величина интенсивности напряжений в диске, профиль которого определяется вектором \tilde{X} ; $\sigma_{\text{доп}}$ – допускаемое напряжение.

Для обеспечения надежного контакта между посадочными поверхностями диска и вала вводим ограничение на величину контактного давления $q > 0$, которое можно сформулировать в виде:

$$\sigma_r^0(\tilde{X}, \delta) < 0, \quad (10.4)$$

где $\sigma_r^0(\tilde{X}, \delta)$ – радиальное напряжение на внутренней поверхности диска при заданной величине натяга δ .

Прямые и функциональные ограничения (10.2) – (10.4) определяют **область допустимых проектных решений D**:

$$D = \left\{ \tilde{X} : h_{\min} \leq h_0 \leq h_{\max}; \quad 0 \leq h_i \leq h_{\max}, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad \sigma_r^0(\tilde{X}, \delta) < 0 \right\}.$$

Таким образом, задача оптимального проектирования вращающихся дисков машин при температурном воздействии состоит в следующем: требуется найти множество управляемых параметров $\{h_1^*, h_2^*, \dots, h_{n-1}^*\}$, определяющих точку оптимума (в данном случае точку минимума) $X^* = X(h_1^*, h_2^*, \dots, h_{n-1}^*)$ в области допустимых проектных решений D , заданной системой прямых и функциональных ограничений (10.1)–(10.3), и оптимальное (в данном случае наименьшее) значение целевой функции $C(X)$ в

точке X^* , т.е. $C(X^*)$. При этом оптимальное решение должно удовлетворять условию

$$C(X^*) = \min_{X \in D} C(X)$$

Точка X^* может быть как внутренней, так и граничной точкой области допустимых проектных решений D .

С математической точки зрения задача оптимального проектирования вращающихся дисков машин сводится к задаче поиска условного минимума целевой функции $C = C(X)$ на множестве допустимых решений D :

$$C(X) \rightarrow \min_{X \in D},$$

где функция C определяет массу диска; X – вектор управляемых параметров.

Для решения поставленной задачи оптимального проектирования дисков машин применяем методы поисковой оптимизации.

10.2. Моделирование напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков машин

Постановка задачи

Рассматриваются осесимметричные вращающиеся диски машин, работающие в условиях температурного воздействия. Типы исследуемых конструкций дисков:

- 1 тип – диски, установленные на вал с натягом (натяг – разность диаметра вала и внутреннего диаметра диска);
- 2 тип – диски с центральным отверстием;
- 3 тип – сплошные диски (без центрального отверстия).

Физическая модель диска с центральным отверстием представлена на рис. 10.2.

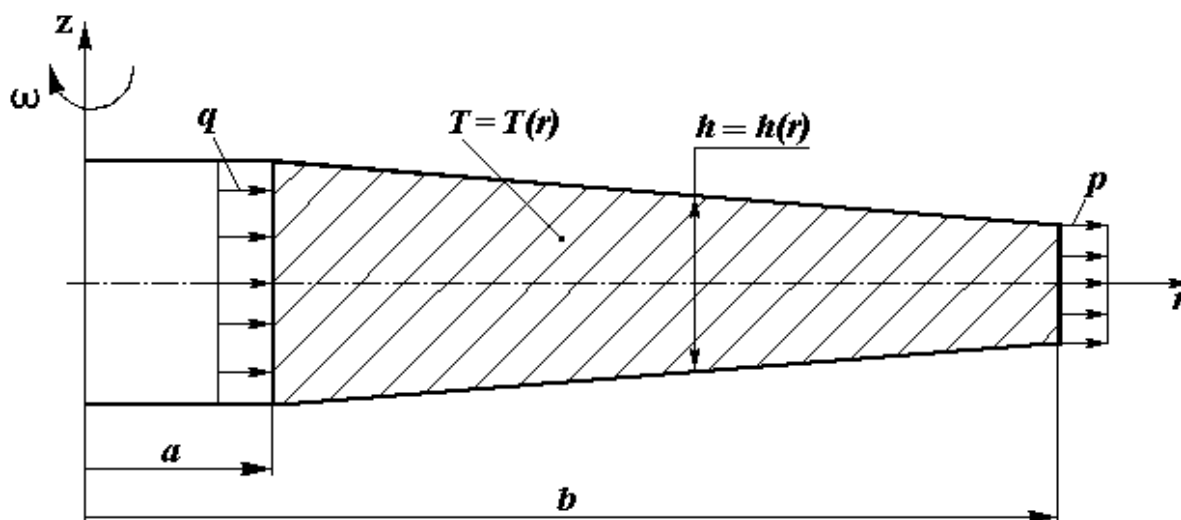


Рис. 10.2. Физическая модель диска

Исходные данные задачи

ω – угловая скорость вращения диска, 1/с.

Конструктивные параметры диска:

a – радиус внутренней поверхности диска, мм;

b – радиус наружной поверхности диска, мм;

$h = h(r)$ – толщина диска, мм;

δ – величина натяга.

Материал диска – изотропный упругий, подчиняется обобщенному закону Гука.

Физико-механические параметры материала диска:

E – модуль упругости, МПа;

μ – коэффициент Пуассона;

α – коэффициент линейного расширения материала диска, 1/К;

ρ – плотность материала диска, кг/м³.

Заданы также зависимости модуля упругости $E = E(T)$, коэффициента Пуассона $\mu = \mu(T)$ и коэффициента линейного расширения материала диска $\alpha = \alpha(T)$ от температуры.

Силовые нагрузки на диск:

p_0 – массовые силы инерции, распределенные по объему диска и направленные по радиусу от оси вращения диска, Н/мм⁴;

q – равномерно распределенная по внутренней поверхности диска радиальная нагрузка, Н/мм². В случае посадки диска на вал

с натягом – это контактное давление между диском и валом. Величина контактного давления зависит от величины натяга δ ;

p – равномерно распределенная по наружной поверхности диска инерционная радиальная нагрузка от присоединенных к диску конструктивных элементов, Н/мм²;

Температура диска:

Полагаем, что температурное поле в диске стационарное. Температура диска изменяется вдоль радиуса по закону:

$$T(r) = T_a + (T_b - T_a) \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

T_a – температура внутренней поверхности диска, °С; T_b – температура наружной поверхности диска, °С.

В результате решения поставленной задачи определению подлежат параметры напряженно-деформированного состояния исследуемого диска: внутренние усилия, напряжения, деформации, перемещения.

При решении задачи принимаем два допущения:

- напряжения по толщине диска распределяются равномерно;
- напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости, отсутствуют. Это позволяет считать напряженное состояние всех точек диска двухосным.

Оба допущения обоснованы тем, что толщина диска мала по сравнению с его диаметром;

Переходим к решению задачи.

Полная система уравнений при формировании математической модели напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта содержит три группы уравнений. В первую группу входят уравнения, определяющие равновесие элементов рассматриваемой конструкции. Эти уравнения получим, рассматривая статическую сторону поставленной задачи.

Уравнения совместности деформаций и перемещений составляют вторую группу уравнений. Эти уравнения получим в форме геометрических соотношений рассматривая деформированное состояние изделия.

Следует отметить, что уравнения первой и второй групп инвариантны относительно физико-механических свойств конструкционного материала и температуры диска.

В третью группу входят уравнения, связывающие напряжения и деформации. В данном случае их конкретный вид определяется соотношениями теории упругости.

Статическая сторона задачи

Двумя радиальными сечениями и двумя концентрическими кольцевыми сечениями выделим из диска элемент, как показано на рис. 10.3.

В радиальных сечениях диска возникают нормальные кольцевые напряжения σ_r . Касательные напряжения по условиям симметрии отсутствуют.

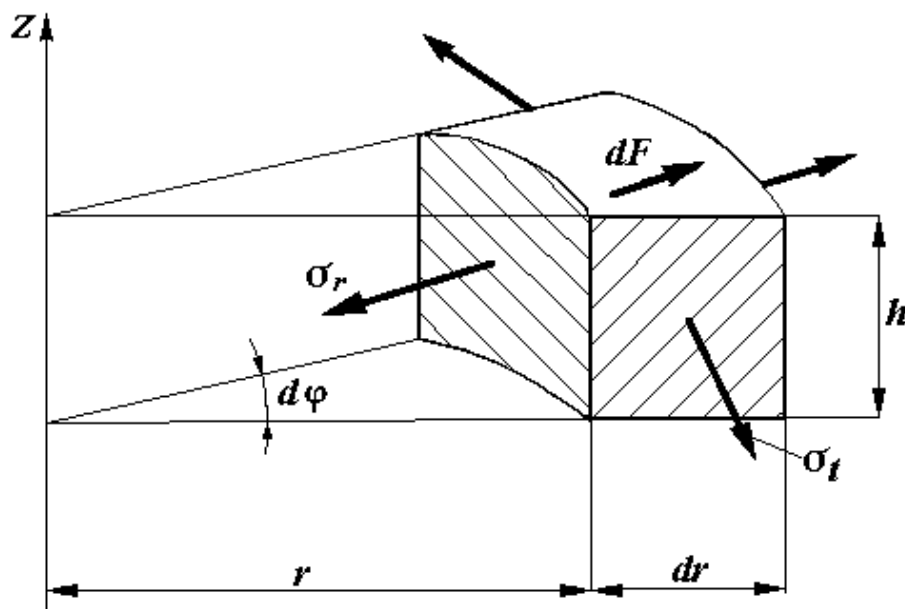


Рис. 10.3. Элемент диска

В кольцевых сечениях возникают нормальные радиальные напряжения σ_r . Полагая, что напряженное состояние диска является плоским (напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости, отсутствуют), приходим к выводу, что касательные напряжения в кольцевых сечениях по закону парности касательных напряжений равны нулю.

К рассматриваемому элементу диска кроме кольцевых и радиальных напряжений приложена объемная сила инерции

$$dF = p_0 dV ,$$

где $dV = rhdrd\varphi$ – объем элемента.

Напряжения, возникающие в сечениях диска, приводим к его срединной плоскости и заменяем статическими эквивалентами – радиальным усилием $N_r = \sigma_r h$ на единицу длины окружного сечения срединной плоскости диска и кольцевым усилием $N_t = \sigma_t h$ на единицу длины радиального сечения срединной плоскости (рис. 10.4).

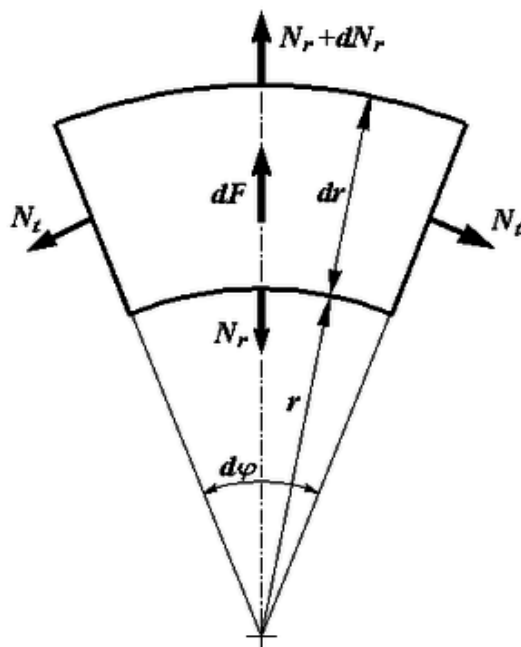


Рис. 10.4. Внутренние усилия в диске

Уравнение равновесия рассматриваемого элемента диска получим, проектируя все силы, действующие на элемент, на радиальное направление:

$$(N_r + dN_r)(r + dr)d\varphi - N_r r d\varphi - 2N_t dr \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + \rho \omega^2 r^2 h dr d\varphi = 0,$$

откуда следует с учетом, что $2 \sin \frac{d\varphi}{2} \approx d\varphi$, а $dN_r dr d\varphi$ – малая величина более высокого порядка, чем остальные слагаемые:

$$r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t + \rho \omega^2 r^2 h = 0.$$

Вводим обозначение $k = \rho \omega^2$. Уравнение равновесия элемента диска принимает вид

$$r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t + kr^2 h = 0.$$

Параметр k называют **динамическим коэффициентом**.

Остальные пять уравнений равновесия для элемента диска выполняются тождественно.

Таким образом, рассматривая статическую сторону задачи мы получили одно уравнение равновесия, куда входят две неизвестных величины: радиальное усилие N_r и кольцевое усилие N_t . Следовательно, задача о расчете внутренних усилий в диске статически неопределима. Поэтому для ее решения необходимо исследовать деформации и перемещения в диске.

Геометрическая сторона задачи

Рассмотрим элемент диска до и после деформации (рис. 10.5).

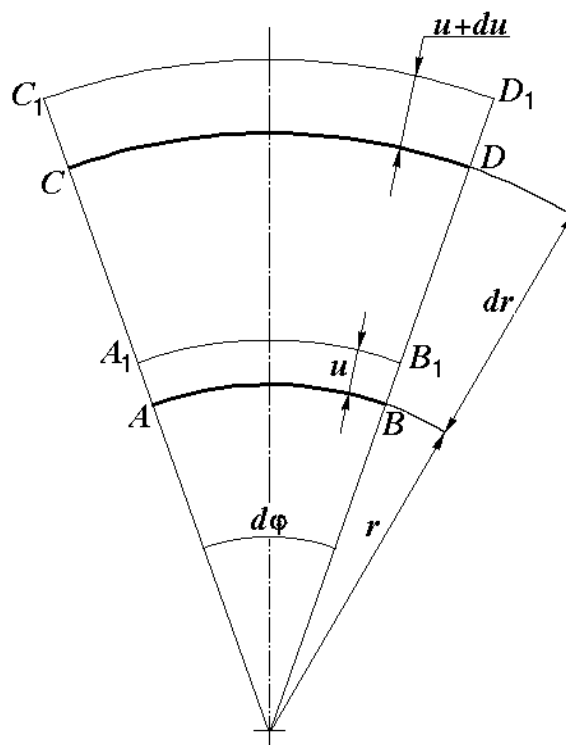


Рис. 10.5. Перемещения точек элемента диска

По условиям осевой симметрии перемещения точек диска в кольцевом направлении запрещены и могут происходить только в радиальном направлении. Обозначим радиальные перемещения точек диска через u , за положительное направление радиального перемещения примем направление от оси диска в сторону увеличения радиуса.

Выразим относительные деформации в диске в радиальном и кольцевом направлениях через радиальное перемещение u :

– радиальная деформация

$$\varepsilon_r = \frac{A_1 C_1 - AC}{AC} = \frac{(dr + u + du - u) - dr}{dr} = \frac{du}{dr};$$

– кольцевая деформация

$$\varepsilon_t = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{(r + u)d\phi - rd\phi}{rd\phi} = \frac{u}{r}.$$

Система полученных трех уравнений

$$r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t + kr^2 h = 0,$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr},$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

содержит пять неизвестных величин: N_r , N_t , ε_r , ε_t , u . Для формирования разрешающей системы уравнений необходимо получить еще два уравнения, для чего следует рассмотреть физическую сторону задачи.

Физическая сторона задачи

Недостающие для решения поставленной задачи уравнения, связывающие напряжения и деформации, получим из обобщенного закона Гука. В данном случае для двухосного напряженного состояния уравнения обобщенного закона Гука имеют следующий вид:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) + \theta(r), \quad (10.5)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) + \theta(r), \quad (10.6)$$

где $\theta(r)$ – температурная деформация, обусловленная нагревом диска.

Температурная деформация определяется уравнением

$$\theta(r) = \alpha \cdot \Delta T(r) = \alpha \cdot (T(r) - T_0),$$

где T_0 – начальная температура равномерно нагретого диска.

Заменяя в уравнениях (10.5) и (10.6) радиальные и кольцевые напряжения σ_r и σ_t радиальными и кольцевыми усилиями N_r и N_t по формулам $\sigma_r = \frac{N_r}{h}$ и $\sigma_t = \frac{N_t}{h}$, получим:

$$N_r \text{ по формулам } \sigma_r = \frac{N_r}{h} \text{ и } \sigma_t = \frac{N_t}{h}, \text{ получим:}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh}(N_r - \mu N_t) + \theta(r),$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{Eh}(N_t - \mu N_r) + \theta(r).$$

Разрешающая система уравнений

Таким образом, в результате выполненного исследования получена система пяти уравнений

$$r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t + kr^2 h = 0,$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr},$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}, \tag{10.7}$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh}(N_r - \mu N_t) + \theta(r),$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{Eh}(N_t - \mu N_r) + \theta(r).$$

с пятью неизвестными $N_r, N_t, \varepsilon_r, \varepsilon_t, u$.

Уравнения (10.7) позволяют получить полное решение задачи о расчете компонентов напряженно-деформированного состояния диска. Для решения системы уравнений (10.7) необходимо предварительно сформулировать граничные условия на внутреннем ($r = a$) и наружном ($r = b$) контурах диска.

Граничные условия

При установке диска на вал с натягом (1 тип конструкции диска) граничное условие на внутреннем контуре диска может быть сформировано в следующем виде:

$$u_0 - \beta N_r^0 = \frac{\delta}{2} + a \cdot \theta_B,$$

где u_0 – радиальное перемещение внутреннего контура диска; N_r^0 – радиальное усилие на внутреннем контуре диска; δ – величина натяга; θ_B – температурная деформация вала; β – коэффициент, учитывающий податливость вала при контактном давлении.

Температурная деформация вала определяется по формуле

$$\theta_B = \alpha_B (T_B - T_{HB}),$$

где α_B – коэффициент линейного расширения материала вала; T_B – температура нагрева вала; T_{HB} – начальная температура вала.

Коэффициент β определяется по формуле

$$\beta = \chi(1 - \mu_B) \frac{a}{E_B h_0},$$

где E_B , μ_B – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала вала.

Коэффициент χ зависит от отношения длины посадочной поверхности диска к диаметру вала и вычисляется по формулам:

$$\chi = \begin{cases} 0,94 \sqrt{\frac{h_0}{a}} & \text{при } \frac{h_0}{a} \leq 0,6 \\ 1 - 0,5e^{-\frac{h_0}{a}} & \text{при } \frac{h_0}{a} > 0,6 \end{cases}$$

где h_0 – толщина диска при $r = a$.

Если в процессе работы между диском и валом образуется зазор, контактное давление между диском и валом обращается в нуль, и граничное условие на внутренней поверхности диска при $r = a$ принимает следующий вид

$$N_r(a) = 0.$$

Граничное условие на наружном контуре диска ($r = b$):

$$N_r(b) = ph(b), \quad (10.8)$$

где $N_r(b)$ – радиальное усилие на наружном контуре диска; $h(b)$ – толщина диска на наружном контуре; p – интенсивность внешней радиальной нагрузки, распределенной по наружной поверхности диска (см. рис. 10.2).

Для диска с центральным отверстием (2 тип конструкции) на внутреннем контуре может быть сформировано следующее граничное условие:

$$N_r^0 = -qh_0,$$

где q – интенсивность внешней радиальной нагрузки, распределенной по внутренней поверхности диска (см. рис. 10.2).

Для граничного условия на наружном контуре диска остается справедливым соотношение (10.8).

Радиальное перемещение центра диска без центрального отверстия (сплошного диска) равно нулю и граничное условие при $r = 0$ принимает вид:

$$u(0) = 0.$$

Граничное условие (10.8) на наружном контуре сплошного диска сохраняет свою силу.

В общем случае для всех рассматриваемых типов конструкций дисков граничное условие на внутреннем контуре можно записать в следующем виде:

$$\gamma_1 u_0 + \gamma_2 N_r^0 = \gamma_3, \quad (10.9)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – заданные коэффициенты.

Значение этих коэффициентов определяются следующим образом:

– для 1-го типа конструкции диска:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -\beta, \gamma_3 = \frac{\delta}{2} + a\theta_B; \quad (10.10)$$

– для 2-го типа конструкции диска:

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = -qh_0; \quad (10.11)$$

– для 3-го типа конструкции диска:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0. \quad (10.12)$$

Таким образом, для всех рассматриваемых типов конструкций граничное условие на внутреннем контуре диска при $r = a$ (для сплошного диска $r = 0$) записывается в виде (10.9), где коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются значениями (10.10) – (10.12).

На наружном контуре диска граничное условие для всех рассматриваемых типов конструкций определяется соотношением (10.8).

Разрешающая система уравнений (10.6) вместе с граничными условиями (10.8) и (10.9) представляет **математическую модель** напряженно-деформированного состояния вращающегося диска машины при температурном воздействии.

10.3. Метод и алгоритм расчета дисков машин

Преобразуем разрешающую систему уравнений (10.7). С этой целью назначаем в качестве основных неизвестных радиальное перемещение u и радиальное усилие N_r . Параметры напряженно-деформированного состояния $N_t, \varepsilon_r, \varepsilon_t$ из уравнений системы исключаем. В результате преобразований получим систему уравнений относительно параметров u и N_r :

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{Eh}{r^2}u - \frac{1-\mu}{r}N_r - krh - \frac{Eh\theta}{r}, \quad (10.13)$$

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{Eh}{r^2}u - \frac{1-\mu}{r}N_r - krh - \frac{Eh\theta}{r}.$$

Дальнейший ход решения задачи связан с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений (10.13). Для определения постоянных интегрирования при этом используем граничные условия (10.8), (10.9). В результате решения системы уравнений (10.13) определяем величины $u(r)$ и $N_r(r)$. Остальные компоненты напряженно-деформированного состояния диска вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned}
N_t &= \mu N_r(r) + Eh \left(\frac{u(r)}{r} - \theta \right), \\
\sigma_r(r) &= \frac{N_r(r)}{h}, \\
\sigma_t(r) &= \mu \frac{N_r(r)}{h} + E \left(\frac{u(r)}{r} - \theta \right), \\
\varepsilon_r(r) &= \frac{1-\mu^2}{Eh} N_r(r) - \frac{\mu}{r} u(r) + (1+\mu), \\
\varepsilon_t(r) &= \frac{u(r)}{r}.
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Представим систему дифференциальных уравнений (10.13) в матричной форме:

$$\frac{dX}{dr} = A(r) \cdot X(r) + f(r), \tag{10.15}$$

где $A(r) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{r} & \frac{1-\mu^2}{Eh} \\ \frac{Eh}{r^2} & -\frac{1-\mu}{r} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы

уравнений (10.11); $X(r) = \begin{pmatrix} u(r) \\ N_r(r) \end{pmatrix}$ – вектор состояния;

$f(r) = \begin{pmatrix} (1+\mu)\theta \\ -krh - \frac{Eh\theta}{r} \end{pmatrix}$ – вектор, учитывающий инерционные силы

и температурную деформацию.

Система (10.15) является неоднородной системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Соответствующая однородная система уравнений имеет вид

$$\frac{dX}{dr} = A(r) \cdot X(r). \tag{10.16}$$

Задача о решении системы (10.15) с граничными условиями (10.8), (10.9) представляет собой линейную **краевую задачу**, когда граничные условия сформулированы в начальной и конечной точках интервала интегрирования. Для решения поставленной краевой задачи применяем **метод начальных параметров**, который позволяет свести решение краевой задачи к решению ряда **начальных задач** (задач Коши).

В соответствии с методом начальных параметров общее решение $X(r)$ системы (10.15) можно представить в виде

$$X(r) = C_1 X^*(r) + C_2 X^{**}(r) + \tilde{X}(r), \quad (10.17)$$

где $X^*(r)$, $X^{**}(r)$ – линейно-независимые решения однородной системы уравнений (10.16); $\tilde{X}(r)$ – частное решение неоднородной (исходной) системы уравнений (10.15); C_1 , C_2 – постоянные интегрирования.

Векторы $\tilde{X}(r)$ находим, решая начальную задачу для системы (10.15) при произвольных начальных условиях $\tilde{X}_0 = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{N}_r \end{Bmatrix}$.

Для решения этой задачи применяем метод Рунге-Кутты. В соответствии с этим методом делим интервал интегрирования $[a, b]$ на заданное число частей n с шагом $\Delta r = (b - a) / n$ (рис. 10.6).

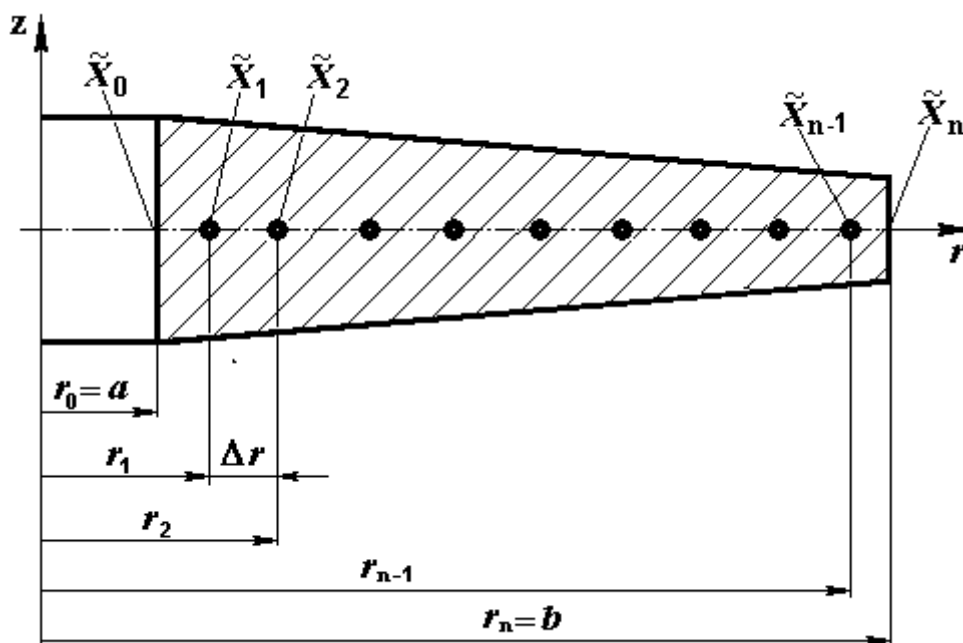


Рис. 10.6. Структура интервала интегрирования

Формируем начальный вектор $\tilde{X}_0 = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{N}_r \end{Bmatrix}$ в начальной точке

$r_0 = a$ интервала интегрирования. Параметрам \tilde{u}_0 , \tilde{N}_r при этом задаем произвольные значения. Далее решаем задачу Коши для системы уравнений (10.15) с начальным вектором \tilde{X}_0 . В процессе решения находим векторы состояния \tilde{X}_{m+1} во всех узловых точках $m = 0, 1, 2, \dots, n$ интервала интегрирования по формуле

$$\tilde{X}_{m+1} = \tilde{X}_m + \left(\tilde{K}_1 + 2\tilde{K}_2 + 2\tilde{K}_3 + \tilde{K}_4 \right) \cdot \frac{\Delta r}{6},$$

где $\tilde{K}_1, \tilde{K}_1, \tilde{K}_1, \tilde{K}_1$ – векторы, вычисляемые по формулам:

$$\tilde{K}_1 = A(r_m) \tilde{X}_m + f(r_m),$$

$$\tilde{K}_2 = A\left(r_m + \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \left(\tilde{X}_m + \tilde{K}_1 \cdot \frac{\Delta r}{2} \right) + f\left(r_m + \frac{\Delta r}{2}\right),$$

$$\tilde{K}_3 = A\left(r_m + \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \left(\tilde{X}_m + \tilde{K}_2 \cdot \frac{\Delta r}{2} \right) + f\left(r_m + \frac{\Delta r}{2}\right),$$

$$\tilde{K}_4 = A(r_m + \Delta r) \cdot \left(\tilde{X}_m + \tilde{K}_3 \cdot \Delta r \right) + f\left(r_m + \frac{\Delta r}{2}\right)$$

Формируем начальные векторы $X_0^* = \begin{pmatrix} u_0^* \\ N_r^{0*} \end{pmatrix}$, $X_0^{**} = \begin{pmatrix} u_0^{**} \\ N_r^{0**} \end{pmatrix}$, за-

давая произвольные значения их компонентам, но обеспечивая при этом линейную независимость этих векторов. Затем выполняем решение двух начальных задач для системы однородных уравнений (10.16). с начальными векторами X_0^* , X_0^{**} . В результате получаем векторы $X^*(r)$, $X^{**}(r)$ во всех узловых точках $r_1 = a + \Delta r$, $r_2 = a + 2\Delta r$, ..., $r_n = b$ интервала интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем граничные условия (10.8), (10.9).

С этой целью запишем векторное соотношение (10.17) для начальной точки $r = a$ и конечной точки $r = b$ интервала интегрирования в развернутом виде:

$$C_1 \begin{pmatrix} u_0^* \\ N_r^{0*} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} u_0^{**} \\ N_r^{0**} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{N}_r^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ N_r^0 \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

$$C_1 \begin{pmatrix} u^*(b) \\ N_r^*(b) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} u^{**}(b) \\ N_r^{**}(b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}(b) \\ \tilde{N}_r(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(b) \\ N_r(b) \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Из векторных соотношений (10.18), (10.19) извлекаем следующие скалярные соотношения:

$$C_1 u_0^* + C_2 u_0^{**} + \tilde{u}_0 = u_0,$$

$$C_1 N_r^{0*} + C_2 N_r^{0**} + \tilde{N}_r^0 = N_r^*, \quad (10.20)$$

$$C_1 N_r^*(b) + C_2 N_r^{**}(b) + \tilde{N}_r(b) = N_r(b).$$

Из граничных условий (10.8) и (10.9) с учетом скалярных соотношений (10.20) получим систему уравнений для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 :

$$\gamma_1 (C_1 u_0^* + C_2 u_0^{**} + \tilde{u}_0) + \gamma_2 (C_1 N_r^{0*} + C_2 N_r^{0**} + \tilde{N}_r^0) = \gamma_3,$$

$$C_1 N_r^*(b) + C_2 N_r^{**}(b) + \tilde{N}_r(b) = ph(b). \quad (10.21)$$

Выполнив решение системы уравнений (10.21), определяем неизвестные C_1 и C_2 .

Далее используя векторное соотношение (10.17), находим векторы состояния $X(r)$ во всех узловых точках $r_1 = a + \Delta r$, $r_2 = a + 2\Delta r$, ..., $r_n = b$ интервала интегрирования $[a, b]$, определяя тем самым параметры $u(r)$ и $N_r(r)$ в этих точках. Остальные параметры напряженно-деформированного состояния диска определяем по уравнениям (10.14), завершая решение поставленной задачи о расчете напряженно-деформированного состояния диска.

Таким образом, изложенный алгоритм предусматривает решение трех начальных задач с произвольно заданными начальными векторами \tilde{X}_0 , X_0^* , X_0^{**} . Если же назначить компоненты начальных векторов рациональным образом, можно ограничиться решением только двух начальных задач, сократив тем самым объем вычислений.

Запишем систему уравнений (10.21) в следующем виде:

$$\begin{aligned} C_1(\gamma_1 u_0^* + \gamma_2 N_r^{0*}) + C_2(\gamma_1 u_0^{**} + \gamma_2 N_r^{0**}) &= \gamma_3 - (\gamma_1 \tilde{u}_0 + \gamma_2 \tilde{N}_r^*), \\ C_1 N_r^*(b) + C_2 N_r^{**}(b) &= N_r(b) - \tilde{N}_r(b). \end{aligned}$$

Для того, чтобы постоянная интегрирования C_2 заведомо обращалась в нуль при любых значениях коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ достаточно выполнить соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_1 u_0^* + \gamma_2 N_r^{0*} &= 0, \\ \gamma_3 - (\gamma_1 \tilde{u}_0 + \gamma_2 \tilde{N}_r^*) &= 0. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Отметим, что выражения $\gamma_1 u_0^* + \gamma_2 N_r^{0*}$ и $\gamma_1 u_0^{**} + \gamma_2 N_r^{0**}$ не могут одновременно обратиться в нуль, так как векторы X_0^* и X_0^{**} по условию задачи линейно-независимы.

Для диска, посаженного на вал с натягом (1 тип конструкции), значения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются выражениями (10.10). Следовательно, соотношения (10.22) будут выполнены, если принять следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} u_0^* &= -\gamma_2 / \gamma_1, N_r^{0*} = 1; \\ \tilde{u}_0 &= \gamma_3 / \gamma_1, \tilde{N}_r^0 = 0, \end{aligned}$$

В этом случае будут сформированы начальные векторы

$$X_0^* = \begin{pmatrix} -\gamma_2 / \gamma_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} \gamma_3 / \gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и постоянная интегрирования C_2 обратится в нуль независимо от конкретных значений коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Следовательно, для решения краевой задачи достаточно выполнить решение только двух начальных задач: для неоднородной системы дифференциальных уравнений (10.15) с начальным вектором \tilde{X}_0 и для однородной системы (10.16) с начальным вектором X_0^* . Постоянную интегрирования C_1 определяем по формуле

$$C_1 = \frac{N_r(b) - \tilde{N}_r(b)}{N_r^*(b)}. \quad (10.23)$$

Решение краевой задачи, учитывая, что $C_2 = 0$, определяется выражением

$$X(r) = C_1 X^*(r) + \tilde{X}(r). \quad (10.24)$$

Для диска с центральным отверстием (2 тип конструкции) значения коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются выражениями (10.11). Соотношения (10.22) выполняются при следующих значениях параметров:

$$u_0^* = 1, N_r^{0*} = 0;$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \tilde{N}_r^0 = \gamma_3 / \gamma_2.$$

Формируем начальные векторы $X_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_3 / \gamma_2 \end{pmatrix}$. Выполняем решение двух задач Коши для систем уравнений (10.15) и (10.16) с начальными векторами \tilde{X}_0 и X_0^* соответственно. Постоянную интегрирования C_1 находим по формуле (10.23). Решение краевой задачи определяется соотношением (10.24).

В диске без центрального отверстия (3 тип конструкции) радиальное смещение центра ($r = 0$) по условиям осевой симметрии равно нулю, вследствие чего коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ принимают значения: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \gamma_3 = 0$.

Соотношения (10.22) выполняются при начальных параметрах

$$u_0^* = 1, N_r^{0*} = 0;$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \tilde{N}_r^0 = 0.$$

Формируем начальные векторы $X_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и с этими векторами выполняем решение задач Коши для систем уравнений (10.15) и (10.16) соответственно. В процессе интегрирования матрицу A и вектор f в узловой точке $r = 0$ формируем следующим образом:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1 - \mu_0}{E_0 h_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Постоянную интегрирования C_1 находим по формуле (10.23). Векторы состояния в узловых точках интервала интегрирования вычисляем по формуле (10.24).

Таким образом, выполнив решение краевой задачи, находим радиальные перемещения $u(r)$ и радиальные усилия $N_r(r)$ во всех узловых точках интервала интегрирования. Остальные параметры напряженно-деформированного состояния диска: кольцевые усилия $N_t(r)$, радиальные и кольцевые напряжения $\sigma_r(r)$, $\sigma_t(r)$, радиальные и кольцевые деформации $\varepsilon_r(r)$, $\varepsilon_t(r)$ в узловых точках интервала интегрирования вычисляем по формулам (10.14).

Параметры напряженно-деформированного состояния в центре сплошного диска вычисляем по формулам:

$$N_t(0) = N_r(0),$$

$$\sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \frac{N_r(0)}{h},$$

$$\varepsilon_r(0) = \varepsilon_t(0) = \frac{1 - \mu_0}{E_0 h_0} N_r(0) + \theta(0).$$

10.4. Программное обеспечение инженерного анализа и оптимального проектирования дисков машин

Общие сведения

Численная реализация изложенного метода и алгоритма инженерного анализа и оптимального проектирования дисков машин осуществлена в виде программного обеспечения. Специализированная система автоматизированного проектирования «DISK» функционирует в операционной системе Windows 10, предоставляет пользователю удобный пользовательский интерфейс. Выполняет синтез и численный анализ напряженно-деформированного состояния вращающихся дисков машин в условиях температурного воздействия, осуществляет поиск оптимальных проектных решений по критерию минимума материалоемкости конструкции.

Исследуются следующие конструкции дисков:

- диски с центральным отверстием постоянной и переменной толщины, симметричные относительно срединной плоскости;
- сплошные диски без центрального отверстия;
- диски, установленные на вал с натягом;

Материал дисков изотропный, упругий. Диск машины и вал могут быть выполнены из различных конструкционных материалов и находятся под воздействием системы осесимметричных силовых нагрузок и температуры. Рассматриваются следующие типы нагрузок:

- инерционная нагрузка, возникающая при вращении конструкции вокруг оси симметрии,
- радиальная нагрузка, распределенная по внутреннему контуру диска,
- радиальная нагрузка, распределенная по наружному контуру диска.

Диск нагрет до температуры $T = T(r)$, переменной по радиусу и постоянной по толщине.

Конфигурация системы автоматизированного проектирования «DISK»

В состав системы автоматизированного проектирования «DISK» входят следующие подсистемы:

- подсистема синтеза,
- подсистема численного анализа,
- подсистема оптимального проектирования.

Главное окно системы «DISK» содержит следующие элементы управления:

- основное меню системы,
- инструментальную панель.

Основное меню системы содержит пункты:

- **Файл,**
- **Исходные данные,**
- **Расчет,**
- **Результаты,**
- **Оптимизация,**
- **Выход,**
- **?**

Пункты основного меню **«Файл»** и **«Результаты»** являются точками входа в выпадающие меню. Инструментальная панель содержит кнопки управления, дублирующие действия пунктов основного меню системы.

Пункт основного меню **«Файл»** является заголовком выпадающего меню, которое содержит следующие пункты:

«Новая задача ...» – служит для создания нового проекта,

«Открыть проект ...» – открывает существующий проект,

«Сохранить проект» – сохраняет параметры физической модели исследуемой конструкции диска и результаты выполненного численного анализа,

«Сохранить результаты в файле ...» – сохраняет результаты выполненного расчета,

«Параметры вывода информации» – позволяет установить число точек вывода информации для исследуемой конструкции,

«Установка принтера ...» – служит для установки принтера и параметров печати результатов расчета,

«Выход» – завершает работу системы.

Выбор пункта основного меню **«Исходные данные»** вызывает для просмотра и редактирования конструктивные параметры исследуемой конструкции диска и параметры нагрузки.

Пункт основного меню **«Расчет»** осуществляет переход в подсистему численного анализа и запускает процедуру расчета диска.

Выпадающее меню **«Результаты»** содержит следующие пункты.

«Таблицы». Выбор этого пункта дает пользователю возможность просмотра в открывающихся окнах и вывода в файл результатов численного анализа напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции диска.

«Графики». Выбор этого пункта позволяет вызвать для просмотра, а также для печати или вывода в файл, графиков компонентов напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции диска.

Пункт основного меню **«Оптимизация»** осуществляет переход в подсистему оптимального проектирования рассматриваемой конструкции.

Выбор пункта **«Выход»** основного меню обеспечивает выход из системы **«DISK»**.

Выпадающее меню «?» содержит пункт «**About ...**», который вызывает на экран форму с краткой информацией о системе «DISK».

Окно подсистемы оптимального проектирования содержит следующие элементы управления:

- основное меню системы,
- инструментальную панель.

Основное меню подсистемы оптимального проектирования содержит пункты:

- **Расчет**,
- **Анализ**,
- **Диск**,
- **Выход**.

Выбор пункта «**Расчет**» основного меню подсистемы оптимального проектирования выполняет переход в подсистему численного анализа, после чего запускается процедура расчета диска, выбранного из базы допустимых проектных решений.

Пункты меню «**Анализ**» и «**Диск**» являются точками входа в выпадающие меню. Инструментальная панель содержит кнопки управления, дублирующие действия пунктов основного меню системы.

Меню «**Анализ**» является заголовком выпадающего меню, которое содержит следующие пункты:

«**Графики**». Выбор этого пункта позволяет вызвать для просмотра, а также для печати или вывода в файл, графиков компонентов напряженно-деформированного состояния диска из базы допустимых проектных решений.

«**Таблицы**». Выбор этого пункта дает пользователю возможность просмотра в открывающихся окнах и вывода в файл результатов численного анализа напряженно-деформированного состояния конструкции диска из базы допустимых проектных решений.

Меню «**Диск**» является заголовком выпадающего меню, которое содержит следующие пункты:

«**Опорные точки профиля диска**». Выбор этого пункта вызывает для просмотра в открывающемся окне, а также для вывода в файл, координат опорных точек профиля диска в узловых сечениях изделия из базы допустимых проектных решений.

«**Эскизный чертеж диска**». Выбор этого пункта позволяет вызвать для просмотра в открывающемся окне, а также для вывода в файл, эскизного чертежа диска из базы допустимых проектных решений.

Выбор пункта «**Выход**» основного меню подсистемы оптимального проектирования обеспечивает выход из этой подсистемы и возвращение в подсистему синтеза конструкции.

Работа с системой «DISK»

После запуска системы открывается титульная форма системы (рис. 10.7).

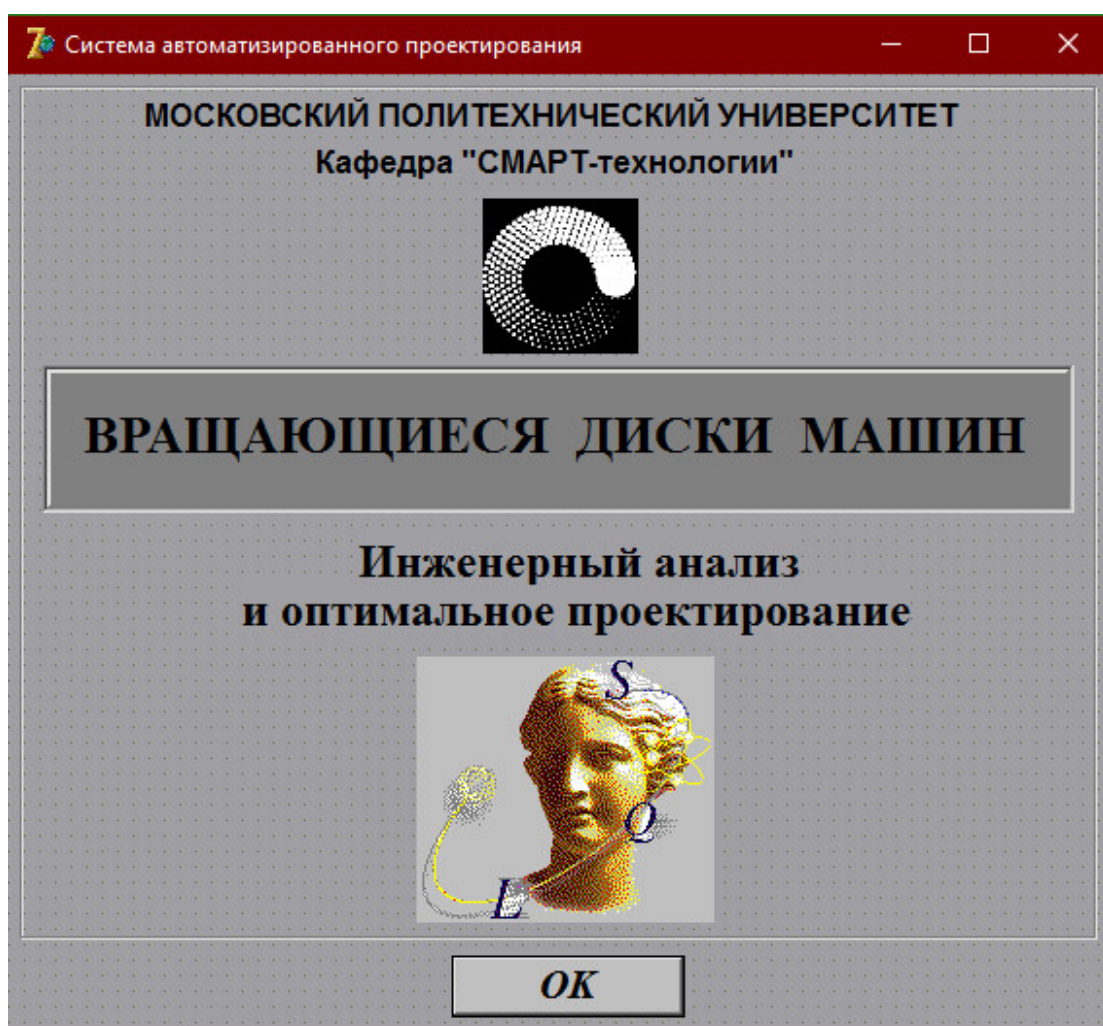


Рис. 10.7. Титульная форма системы «DISK»

Нажимая кнопку «**OK**», переходим в главное окно системы «DISK» (рис. 10.8). Для решения новой задачи в выпадающем меню «**Файл**» выбираем пункт «**Новая задача ...**».

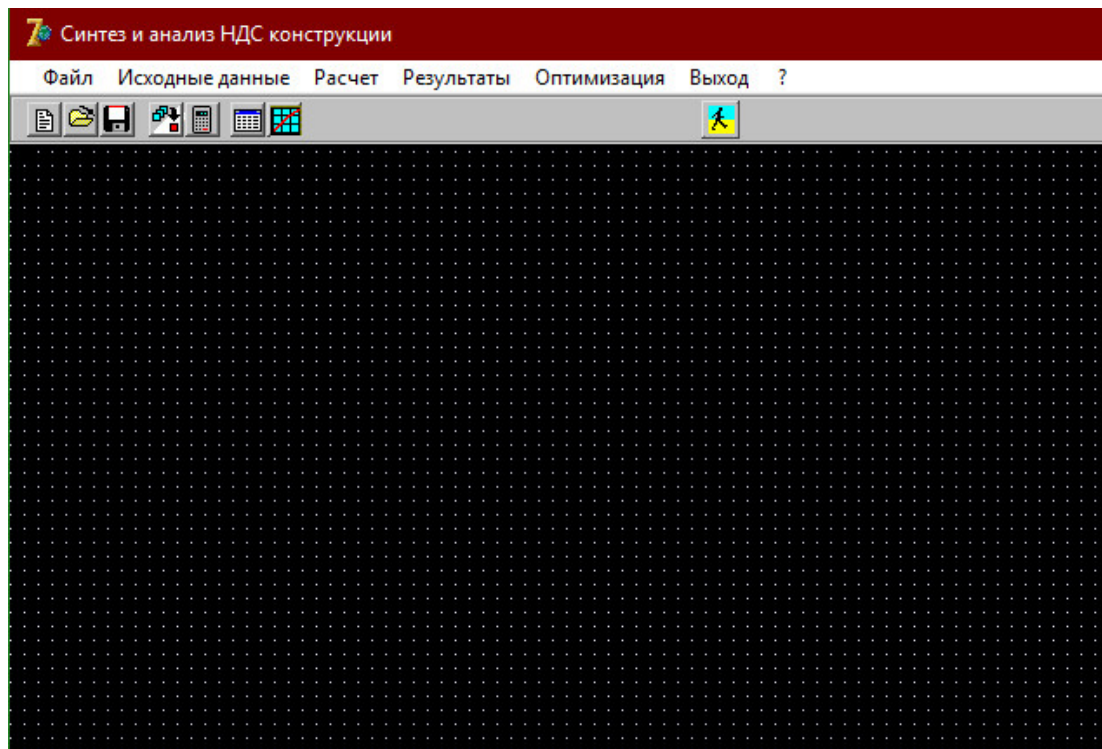


Рис. 10.8. Главное окно системы

На экране появляется форма «Новая задача» (рис. 10.9). По запросу системы устанавливаем и подтверждаем название нового проекта (в данном случае – **Disk_1.mod**).

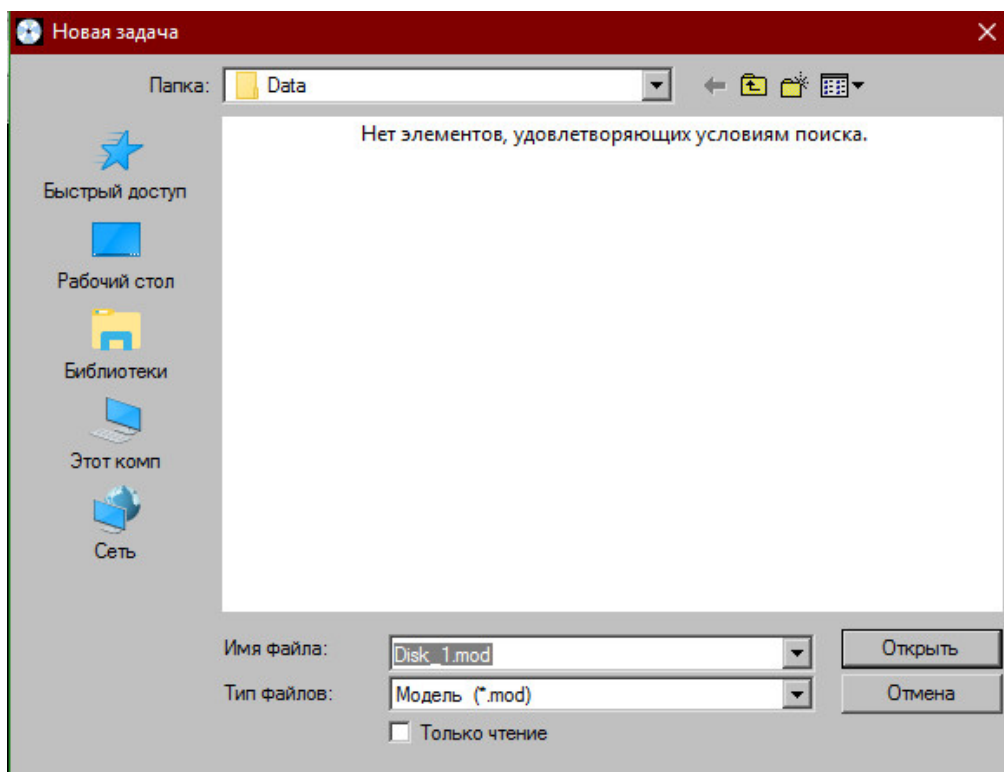


Рис. 10.9. Запуск нового проекта

После подтверждения названия проекта система предлагает выбрать тип конструкции диска (рис. 10.10).

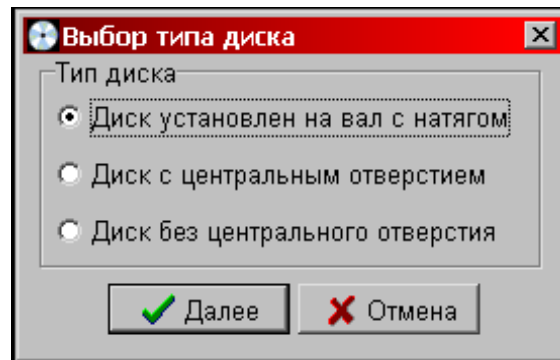


Рис. 10.10. Выбор типа диска

Выбрав тип диска и нажав кнопку «Далее», попадаем в подсистему синтеза базовой конструкции диска (рис. 10.11).

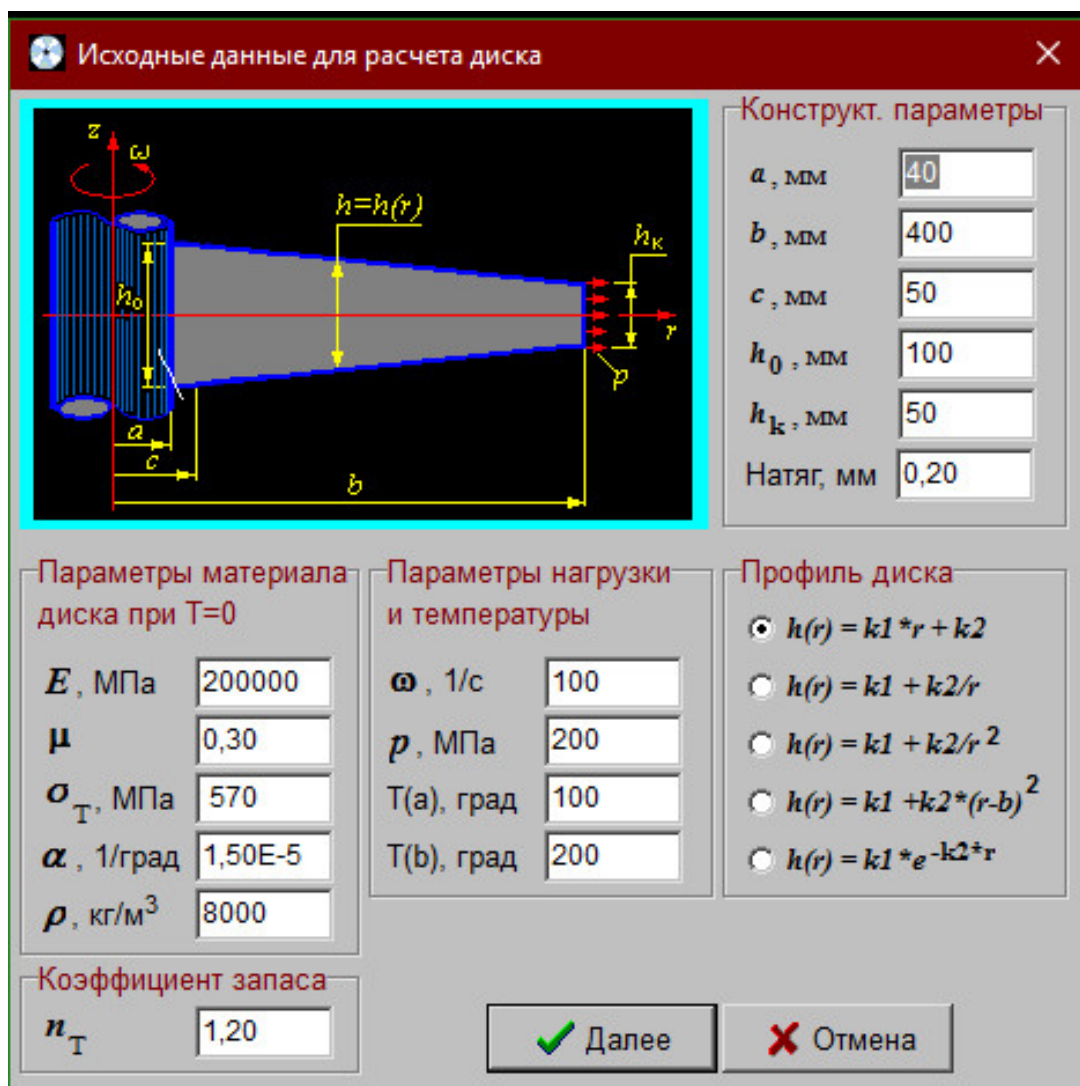


Рис. 10.11. Подсистема синтеза конструкции диска

Здесь система предлагает выбрать базовый профиль диска из множества конических, гиперболических, параболических или экспоненциальных дисков, а также ввести конструктивные параметры проектируемого диска, физико-механические параметры конструкционного материала, параметры нагрузки и температуры нагрева и коэффициент запаса прочности.

В качестве базовой конструкции выбираем конический диск и после ввода исходных данных возвращаемся в главное окно системы (рис. 10.12), где система выполняет эскизный чертеж базовой конструкции диска в соответствии с введенными исходными данными.

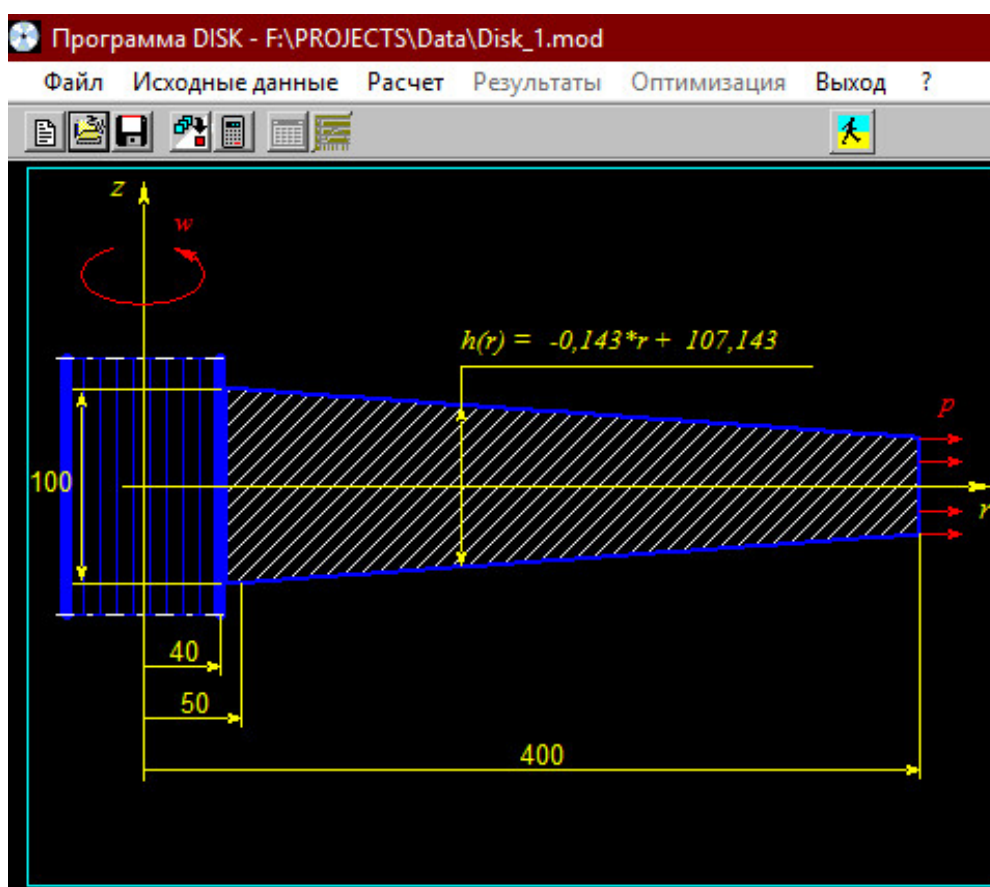


Рис. 10.12. Базовая конструкция диска

Проверяем правильность ввода исходных данных. В случае необходимости возвращаемся в подсистему синтеза и выполняем корректировку исходных данных.

Убедившись в правильности ввода исходных данных, выбираем пункт «**Расчет**» основного меню системы или нажимаем соответствующую кнопку инструментальной панели, запуская тем

самым процедуру численного анализа. При успешном завершении расчета система выдает сообщение, показанное на рис. 10.13.

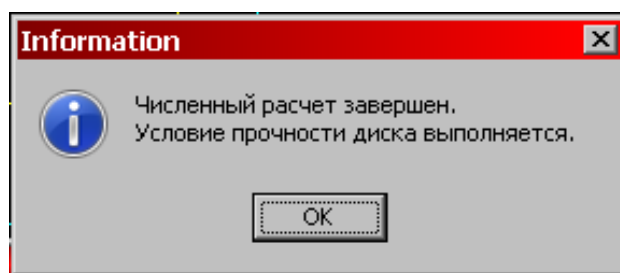


Рис. 10.13. Сообщение об успешном завершении расчета

Просматриваем результаты расчета выбирая соответствующие пункты выпадающего меню «**Результаты**» или соответствующие кнопки инструментальной панели главного окна системы. Полученную информацию выводим на печать или сохраняем в соответствующих файлах.

В таблице на рис. 10.14 показаны результаты расчета напряжений в диске. На рис. 10.15 показано распределение напряжений по радиусу диска.

Параметры напряженно-деформированного состояния диска				
Напряжения				
Радиус, мм	SigmaR, МПа	SigmaT, МПа	Интенсивность напряжений, МПа	Допускаемые напряжения, МПа
40,00	-3,06	462,03	463,57	465,48
43,60	33,24	413,36	397,78	465,12
47,20	60,69	374,66	348,30	464,79
50,80	81,87	343,28	310,55	464,49
54,40	98,73	317,49	281,43	464,20
58,00	112,13	295,93	258,77	463,94
61,60	122,91	277,66	240,99	463,69
65,20	131,64	262,02	226,92	463,45
68,80	138,78	248,48	215,68	463,23
72,40	144,64	236,65	206,63	463,02
76,00	149,49	226,24	199,28	462,82
79,60	153,52	217,01	193,25	462,63
83,20	156,88	208,76	188,26	462,45
86,80	159,70	201,36	184,10	462,27
90,40	162,05	194,68	180,59	462,10
94,00	164,03	188,62	177,61	461,94
97,60	165,70	183,09	175,04	461,79
101,20	167,10	178,03	172,83	461,64
104,80	168,29	173,39	170,89	461,49
108,40	169,28	169,10	169,19	461,35
112,00	170,12	165,14	167,69	461,22
115,60	170,83	161,47	166,34	461,08
119,20	171,42	158,05	165,14	460,96
122,80	171,91	154,86	164,05	460,84
126,40	172,32	151,89	163,07	460,72
130,00	172,67	149,10	162,17	460,60
133,60	172,95	146,48	161,35	460,49
137,20	173,19	144,02	160,60	460,38

Рис. 10.14. Таблица напряжений в базовом диске

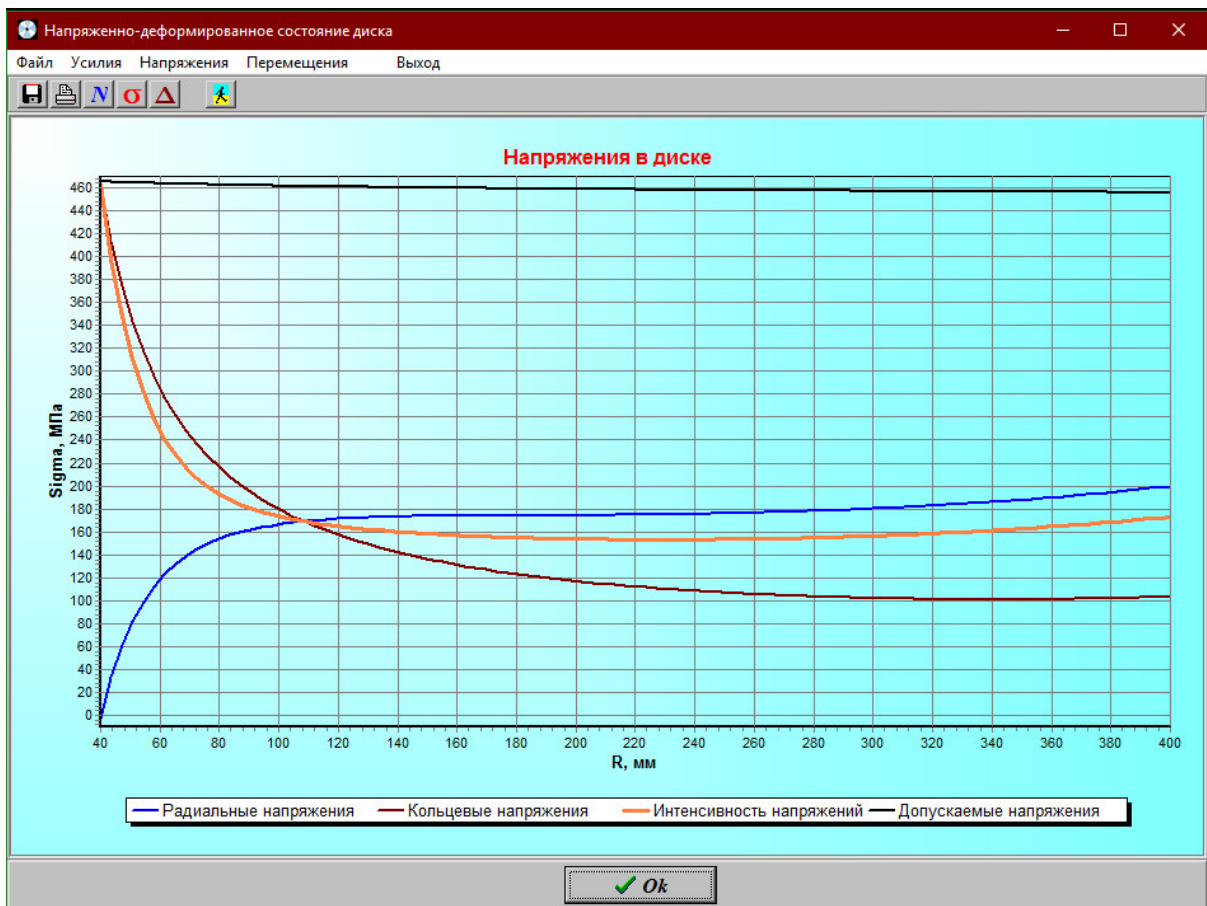


Рис. 10.15. Распределение напряжений по радиусу базового диска

Как следует из результатов численного анализа, распределение напряжений в диске крайне неравномерно. Интенсивность напряжений в сечениях диска, примыкающих к внутреннему контуру, приближается к допускаемым напряжениям. В тоже время величина интенсивности напряжений в остальных сечениях существенно (почти в 3 раза) меньше допускаемых значений. Среднее отклонение интенсивности напряжений в сечениях диска от допускаемых значений составляет 284,5 МПа.

С целью поиска оптимального проектного решения выбираем пункт «**Оптимизация**» основного меню системы и переходим в подсистему оптимального проектирования. На экране монитора (рис. 10.16) видим исследуемую конструкцию диска, ее массу (в данном примере 273,49 кг), которая внесена системой в базу конструкций в качестве исходной.

Для поиска оптимальной конструкции применяем метод поисковой оптимизации в режиме диалогового взаимодействия с ЭВМ. В процессе поиска с помощью устройства указания изменяем толщину диска в узловых сечениях $r = r_1, r = r_2, \dots, r = r_{n-1}$

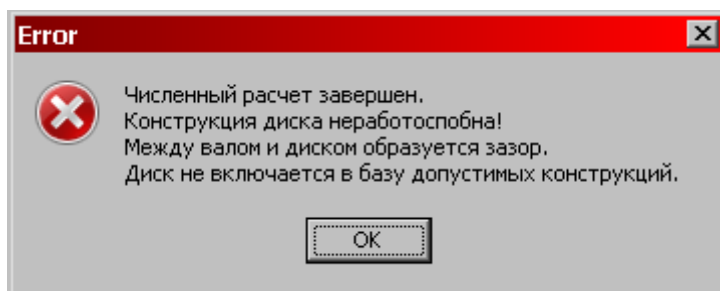


Рис. 10.18. Сообщение о зазоре между валом и диском

Если все функциональные ограничения выполняются, и масса исследуемого диска меньше массы предыдущего изделия, диск включается в базу допустимых конструкций (рис. 10.19).

Подсистема оптимального проектирования предоставляет пользователю возможность автоматизированного поиска оптимальной конструкции диска. Решение задачи оптимизации построено на основе метода направленного сканирования. Максимальное число испытаний, выполняемых подсистемой при поиске оптимального проекта, составляет 1048576 испытаний.

На рис. 10.20 представлены результаты выполненной оптимизации исходной конструкции диска в автоматическом режиме.

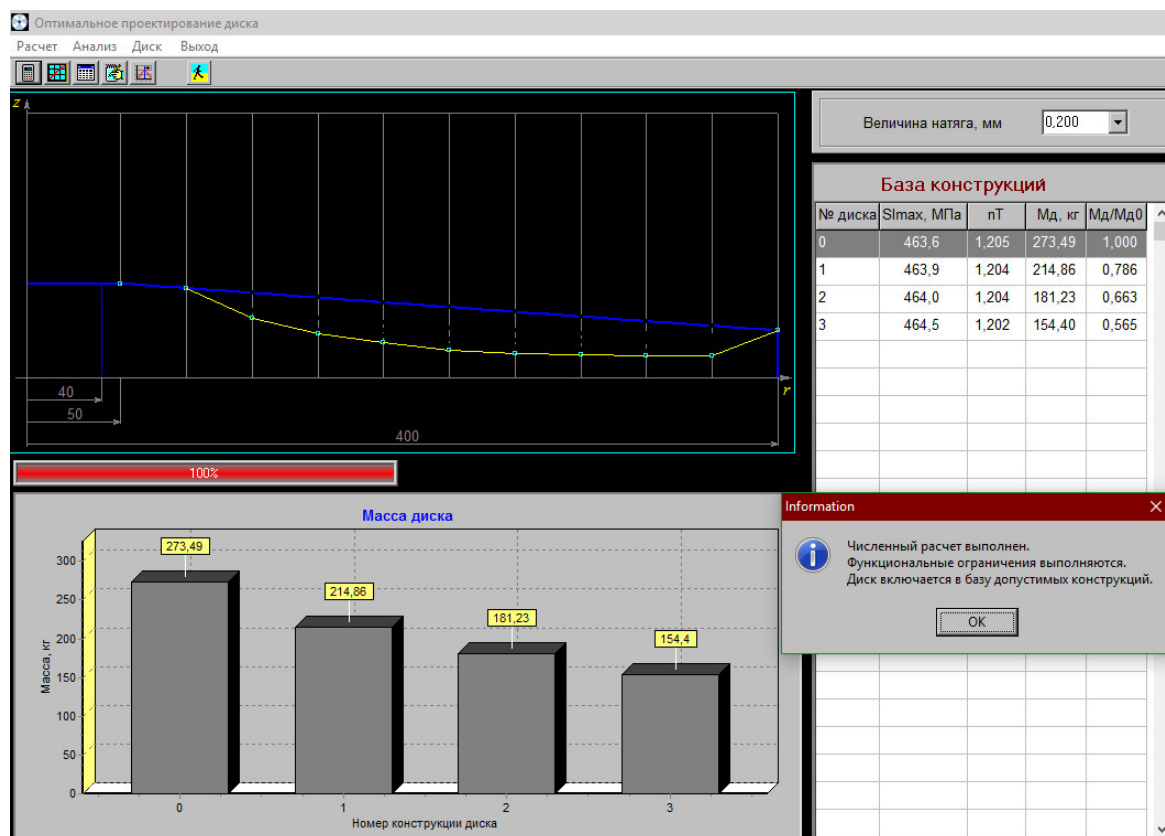


Рис. 10.19. Сообщение о включении диска в базу допустимых конструкций

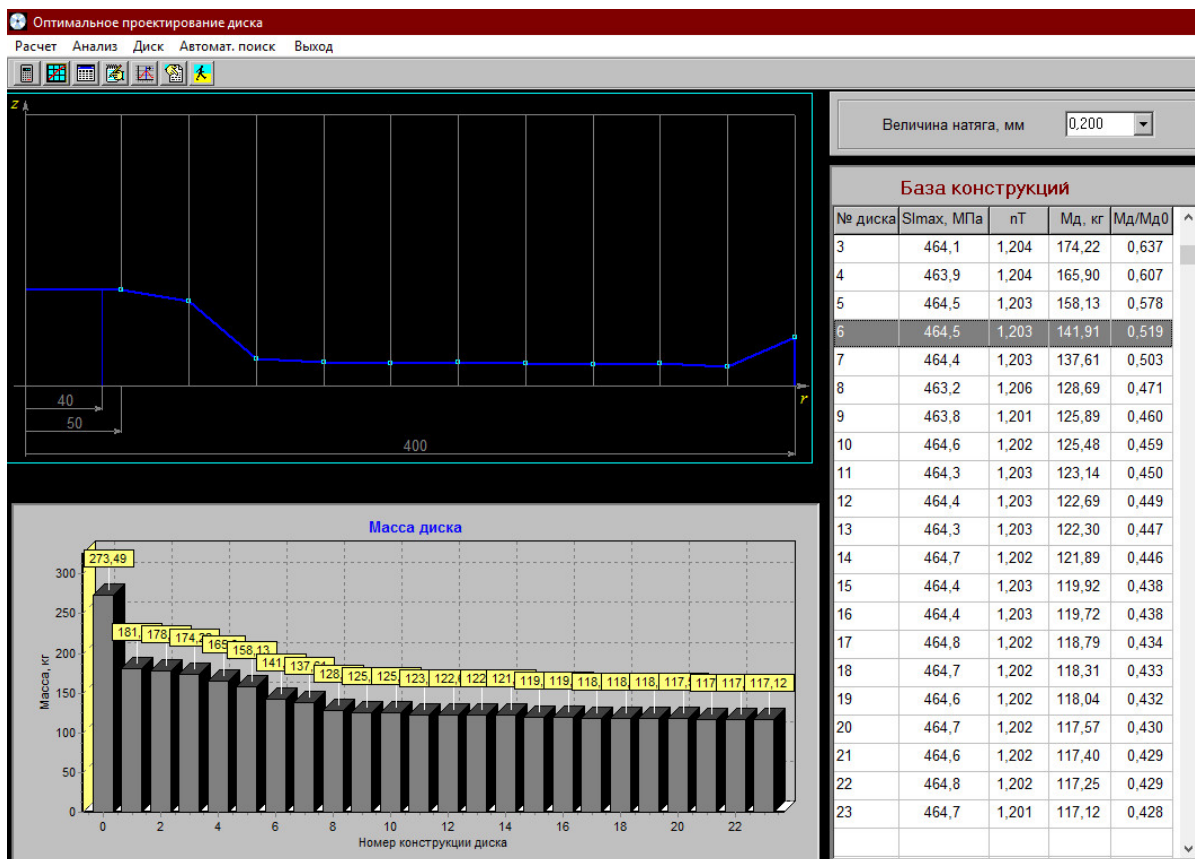


Рис. 10.20. Результаты поиска оптимального проектного решения

В данном случае в процессе решения задачи оптимизации система выполнила 262144 испытания. В процессе поиска система отыскала 23 допустимых конструкций диска, управляемые параметры которых удовлетворяют прямым и функциональным ограничениям. Найденные конструкции включены в базу допустимых проектных решений.

По результатам поиска в качестве оптимальной принимаем конструкцию диска № 23, масса которой составляет 117,12 кг. Величина натяга составляет 0,2 мм. Условия работоспособности диска выполняются.

На рис. 10.21 показано распределение напряжений по радиусу диска оптимальной конструкции. Максимальное значение интенсивности напряжений $\sigma_i^{\max} = 464,75$ МПа достигается в точках внутренней поверхности диска.

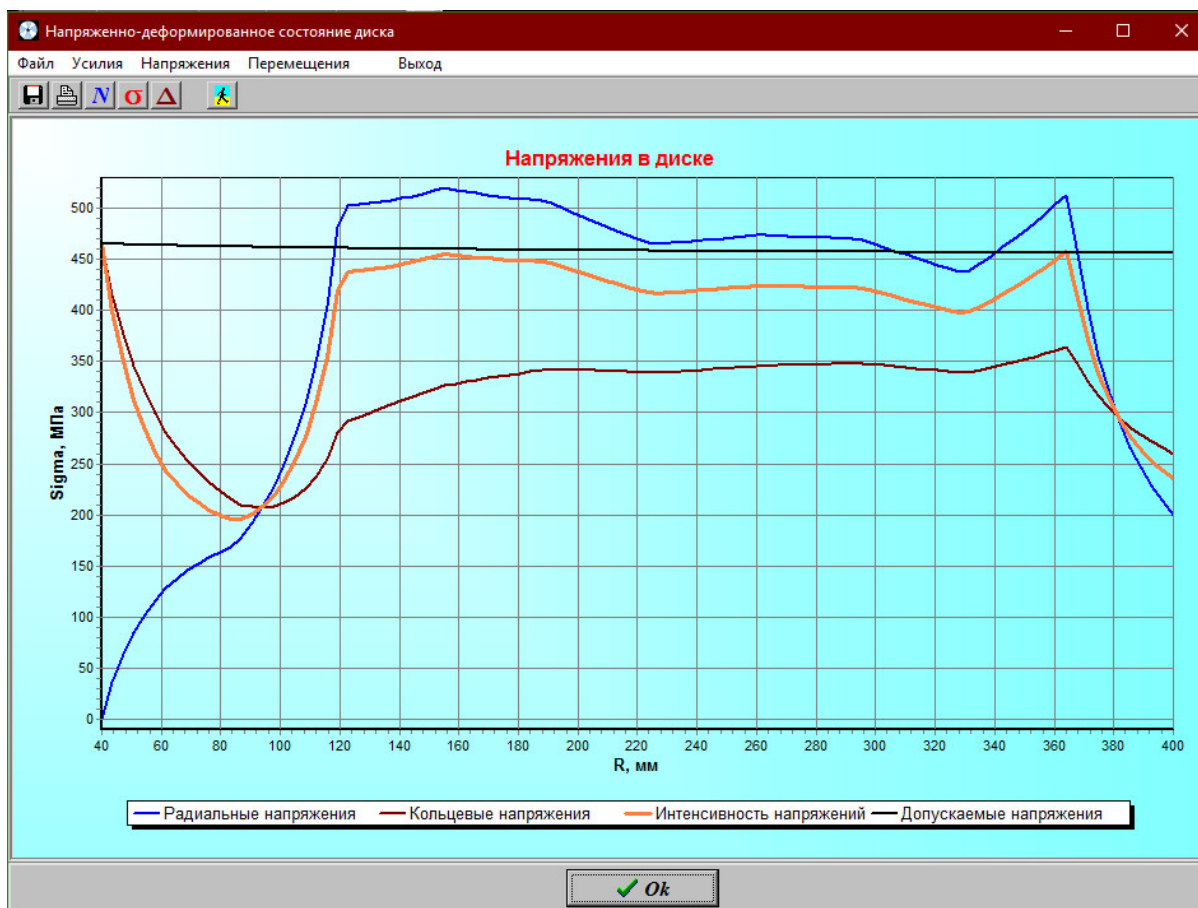


Рис. 10.21. Напряжения в диске оптимальной конструкции

Сравнение базовой и оптимальной конструкций диска показывает, что в результате оптимизации материалоемкость изделия удалось снизить в 2,3 раза. Показатели работоспособности при этом сохранены. В диске оптимальной конструкции напряжения распределены по радиусу диска существенно более равномерно по сравнению с базовой конструкцией. Среднее отклонение расчетных значений интенсивности напряжений в сечениях оптимального диска от допускаемых значений составляет 79,0 МПа (в базовом диске – 284,5 МПа).

По завершении работы система генерирует таблицу опорных точек профиля диска (рис. 10.22) и эскизный чертеж диска (рис. 10.23).

Опорные точки профиля диска

Профиль диска

№ сечения	R, мм	h(R), мм
1	50,0	100,0
2	85,0	88,1
3	120,0	28,6
4	155,0	25,0
5	190,0	23,8
6	225,0	24,7
7	260,0	23,2
8	295,0	22,5
9	330,0	23,8
10	365,0	19,5
11	400,0	50,0

Ok

Рис. 10.22. Опорные точки профиля диска

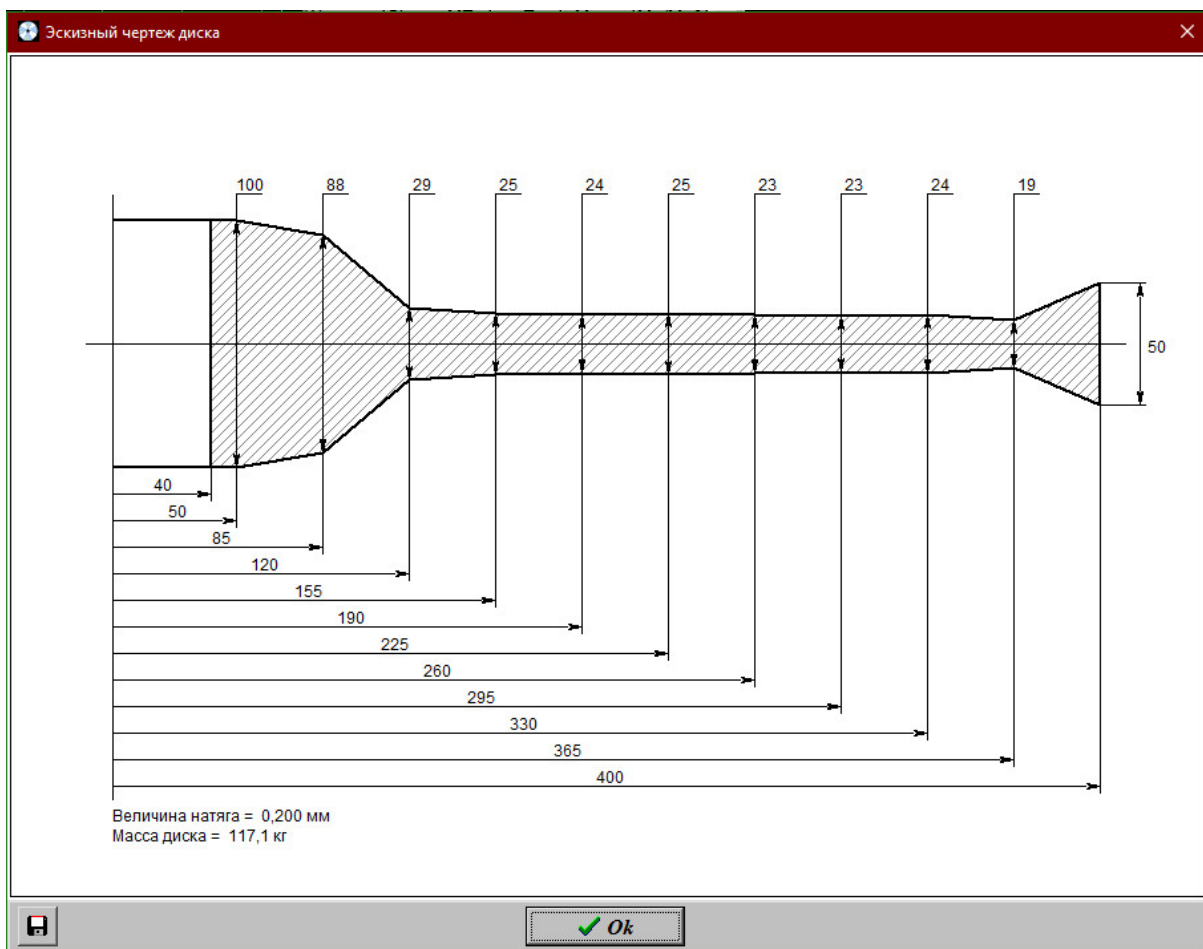


Рис. 10.23. Оптимальная конструкция диска

Заключение

Проблемы оптимального проектирования технических устройств и систем в последнее время привлекают внимание все большего числа исследователей. Развитие методологии, численных методов и алгоритмов оптимального проектирования оказывает существенное влияние на новые требования к системам автоматизированного проектирования. Общим для задач принятия оптимальных решений, которые возникают на разных этапах проектирования, является то, что они могут быть сформулированы математически как задачи нелинейной параметрической оптимизации, когда для заданной математической модели проектируемой конструкции требуется подобрать такие значения управляемых параметров, чтобы они обеспечивали экстремальное значение одной из наиболее важных технико-экономических характеристик при условии выполнения ряда прямых и функциональных ограничений.

К сожалению, среди численных методов поиска оптимальных решений, которые получили название методов оптимального проектирования, не существует универсального метода, который позволял бы эффективно решать любую задачу нелинейной параметрической оптимизации. В настоящее время решение каждой задачи оптимального проектирования требует индивидуального подхода и, как правило, связано с применением нескольких методов поиска оптимального решения. Но даже в этом случае успех во многом зависит от опыта и квалификации инженера-конструктора. В связи с этим в разрабатываемых системах автоматизированного проектирования большое внимание уделяется вопросам принятия оптимальных решений в интерактивном режиме, когда конструктор имеет возможность оперативно взаимодействовать с системой автоматизированного проектирования в процессе решения поставленной задачи. При этом он может изменять по своему усмотрению как количество, так и численные значения управляемых и неуправляемых параметров, выбирать наиболее эффективный в сложившейся ситуации метод поиска, изменять параметры математической модели применительно к особенностям целевой функции и

т.д. Такой подход к решению задач параметрической оптимизации позволяет осуществить адаптацию методов поиска к особенностям конкретной задачи проектирования, но для этого конструктор должен понимать какие методы оптимизации и в каких случаях следует применять для того или иного класса задач на различных этапах проектирования.

Список литературы

1. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
2. Колдин В.А., Луганцев Л.Д. Автоматизированный расчет напряженно-деформированного состояния горизонтальных тонкостенных резервуаров // Химическое и нефтяное машиностроение. 1994. № 12. С. 1–4.
3. Колдин В.А., Луганцев Л.Д. Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных цилиндрических резервуаров // Химическое и нефтяное машиностроение. 1995. № 3. С. 5–8.
4. Колдин В.А., Луганцев Л.Д. Оптимальное проектирование горизонтальных тонкостенных резервуаров // Химическое и нефтяное машиностроение. 1995. № 9. С. 1–5.
5. Колдин В.А. Инженерный анализ и оптимальное проектирование горизонтальных резервуаров: дис. ... канд. техн. наук: 05.02.13: защищена 26.02.2009: утв. 25.06.2009 / В.А. Колдин. Моск. гос. ун-т инженер. экологии, 2009. 251 с.
6. Луганцев Л.Д. Расчет на прочность вращающихся дисков машин: Курс лекций. М.: Моск. гос. ун-т инженер. экологии, 2005. 27 с.
7. Луганцев Л.Д. Расчет и оптимальное проектирование вращающихся дисков машин на ЭВМ: Учебное пособие. М.: Университет машиностроения, 2014. 56 с.
8. Луганцев Л.Д. Расчет оболочечных конструкций на ЭВМ: Учебное пособие. М.: Университет машиностроения, 2013. 57 с.
9. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
10. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования: Учеб. для вузов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 336 с.
11. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981. 110 с.

**Задание на курсовую работу
«Анализ напряженно-деформированного состояния
и оптимальное проектирование вращающихся дисков машин»**

Конструктивная схема исследуемого диска машины представлена на рис. П.1.

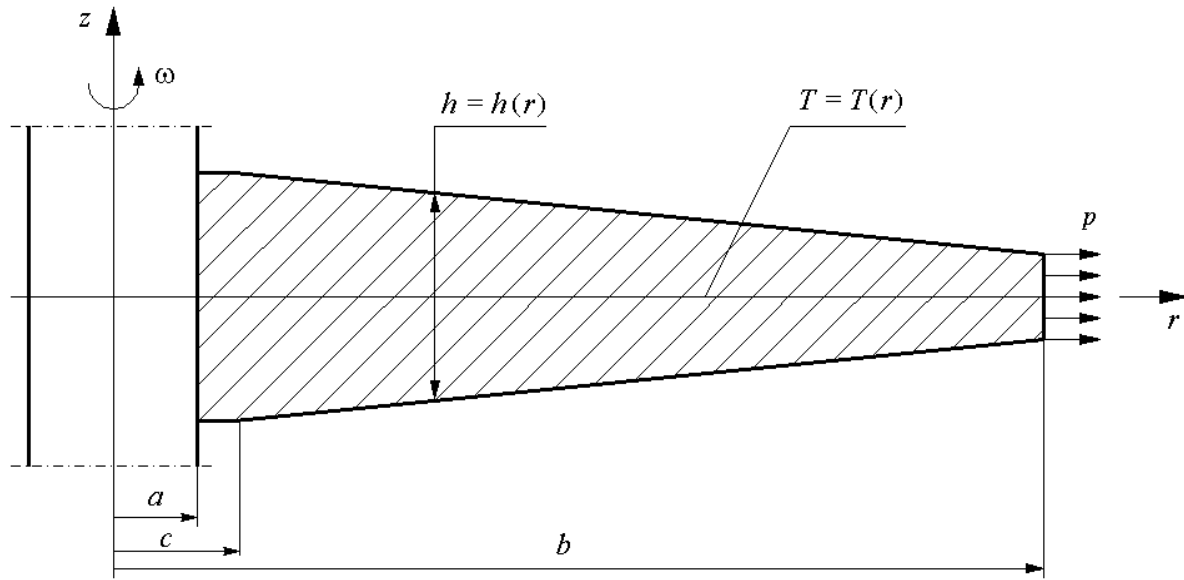


Рис. П.1. Конструктивная схема диска машины

Диск установлен на вал с натягом δ . Заданы геометрические размеры диска: a , b , c (рис. П.1). Задан профиль базовой конструкции диска $h = h(r)$. В качестве базовых конструкций исследуются конические и гиперболические диски. Профиль конического диска задан уравнением $h(r) = k_1 - k_2 r$. Профиль гиперболического диска – уравнением $h(r) = \frac{k_1}{r} + k_2$. Уравнения, определяющие профиль базового диска, представлены в табл. П.1.

Физико-механические характеристики материала диска и вала одинаковы. Плотность конструкционного материала $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Модуль упругости и температурный коэффициент линейного расширения материала зависят от температуры:

$$E = 2 \cdot 10^5 - 140 \cdot T, \text{ МПа};$$

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-9} \cdot T, \text{ 1/К.}$$

Исходные данные

№	a , мм	b , мм	c , мм	Профиль диска $h = h(r)$, мм	ω , 1/с	P , МПа	T_a , °C	T_b , °C
1	110	480	120	$150 - 0,25r$	300	100	190	500
2	90	400	100	$125 - 0,25r$	400	150	190	500
3	70	320	80	$100 - 0,25r$	500	200	190	500
4	50	240	60	$75 - 0,25r$	600	250	190	500
5	30	160	40	$50 - 0,25r$	700	300	190	500
6	110	600	120	$142,5 - 0,1875r$	300	100	190	500
7	90	500	100	$118,75 - 0,1875r$	400	150	190	500
8	70	400	80	$95 - 0,1875r$	500	200	190	500
9	50	300	60	$71,25 - 0,1875r$	600	250	190	500
10	30	200	40	$47,5 - 0,1875r$	700	300	190	500
11	110	720	120	$138 - 0,15r$	300	100	190	500
12	90	600	100	$115 - 0,15r$	400	150	190	500
13	70	480	80	$92 - 0,15r$	500	200	190	500
14	50	360	60	$69 - 0,15r$	600	250	190	500
15	30	240	40	$46 - 0,15r$	700	300	190	500
16	110	480	120	$14400/r$	300	100	210	600
17	90	400	100	$10000/r$	400	150	210	600
18	70	320	80	$6400/r$	500	200	210	600
19	50	240	60	$3600/r$	600	250	210	600
20	30	160	40	$1600/r$	700	300	210	600
21	110	600	120	$13500/r + 7,5$	300	100	210	600
22	90	500	100	$9375/r + 6,25$	400	150	210	600
23	70	400	80	$6000/r + 5$	500	200	210	600
24	50	300	60	$3375/r + 3,75$	600	250	210	600
25	30	200	40	$1500/r + 2,5$	700	300	210	600
26	110	720	120	$12960/r + 12$	300	100	210	600
27	90	600	100	$9000/r + 10$	400	150	210	600
28	70	480	80	$5760/r + 8$	500	200	210	600
29	50	360	60	$3240/r + 6$	600	250	210	600
30	30	240	40	$1440/r + 4$	700	300	210	600

Диск вращается с угловой скоростью ω и нагрет до температуры $T = T(r)$, переменной по радиусу и постоянной по толщине диска. Заданы значения температуры нагрева T_a и T_b на внутрен-

ней и наружной поверхностях диска. Вдоль радиуса температура диска изменяется по логарифмическому закону

$$T(r) = T_a + (T_b - T_a) \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Вал нагрет равномерно до температуры T_a внутренней поверхности диска. Интенсивность инерционной радиальной нагрузки, распределенной по наружной поверхности диска равна p . Числовые значения исходных данных представлены в табл. П.1.

1. На **первом этапе** оптимального проектирования диска выполнить постановку и решение одномерной оптимизационной задачи для заданного базового диска с целью определения оптимальной величины натяга δ_{opt} при установке диска на вал и минимально необходимого предела текучести σ_T конструкционного материала.

2. При постановке задачи оптимизации **первого этапа** проектирования сформировать (определить):

- вектор критериев эффективности;
- критерий оптимальности,
- вектор управляемых параметров;
- вектор неуправляемых параметров;
- функцию цели (целевую функцию);
- пространство проектирования,
- прямые ограничения,
- функциональные ограничения,
- область поиска оптимальных решений,
- область допустимых решений,
- число испытаний системы.

3. Решение задачи оптимизации **первого этапа** проектирования выполнить следующими методами:

- методом дихотомического деления,
- методом золотого сечения,
- методом чисел Фибоначчи.

4. В результате решения задачи определить оптимальную величину натяга δ_{opt} , удовлетворяющую условиям:

- зазор между диском и валом в эксплуатационном режиме отсутствует;

- контактное давление между диском и валом в эксплуатационном режиме не превышает 0,5 МПа.
5. Определить минимальное необходимое значение предела текучести σ_T материала базового диска. Коэффициент запаса прочности исследуемой конструкции по пределу текучести конструкционного материала принять равным $n_T = 1,2$.
6. Сопоставить результаты решения данной оптимизационной задачи различными методами и дать оценку эффективности применяемых методов решения.
7. Выполнить оценку прочности базового диска по допускаемым напряжениям при отсутствии температурного воздействия.
8. На **втором этапе** оптимального проектирования найти оптимальный профиль диска по критерию минимума материалоемкости изделия, обеспечив при этом работоспособность конструкции.
9. При постановке задачи оптимизации **второго этапа** проектирования сформировать (определить):
- вектор критериев эффективности;
 - критерий оптимальности,
 - вектор управляемых параметров;
 - вектор неуправляемых параметров;
 - функцию цели (целевую функцию);
 - пространство проектирования,
 - прямые ограничения,
 - функциональные ограничения,
 - область поиска оптимальных решений,
 - область допустимых решений,
 - число испытаний системы
10. Для решения оптимизационной задачи **второго этапа** проектирования применить следующие методы:
- метод поисковой оптимизации в режиме диалога с системой автоматизированного проектирования «DISK»;
 - метод направленного сканирования в автоматическом режиме.
11. В результате решения задачи на **втором этапе** оптимального проектирования найти оптимальный профиль диска по критерию минимума материалоемкости изделия, обеспечив при этом работоспособность конструкции.

12. Сопоставить результаты решения задачи оптимизации различными методами и дать оценку эффективности применяемых методов решения.

13. Выполнить оценку прочности оптимальной конструкции диска по допускаемым напряжениям при отсутствии температурного воздействия.

Для расчета напряженно-деформированного состояния исследуемых конструкций диска в процессе решения задач проектирования, а также для решения задачи оптимизации профиля диска методом направленного сканирования в автоматическом режиме применить систему автоматизированного проектирования «DISK».

Учебное электронное издание

Луганцев Леонид Дмитриевич

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В САПР

Учебно-методическое пособие

*Разработано с помощью программного обеспечения
Microsoft Office Word, Adobe Acrobat Pro*

Издается в авторской редакции

Компьютерная верстка: *Ю.С. Акульшина*

Подписано к использованию 31.08.2021

Объем издания Мб. Тираж 50. Заказ №

Издательство Московского Политеха

115280, Москва, Автозаводская, 16

www.mospolytech.ru; e-mail: izdat.mospolytech@yandex.ru;

тел. (495) 276-33-67