Математика №1

Обозначим количество девятиклассников N_9. Понятно, что это натуральное число. Тогда количество десятиклассников будет 10 N_9, а количество участников

$$N = 10N_9 + N_9 = 11N_9.$$

Изобразим турнирную таблицу N участников:

	1	2	…	N
1			…	
2			…	
…	…	…		…
N			…	

Каждая партия отмечается в таблице двумя недиагональными ячейками, расположенными симметрично относительно главной диагонали. Поэтому количество партий O равно половине количества недиагональных ячеек. Количество недиагональных ячеек равно общему количеству ячеек таблицы (N^2) минус все диагональные клетки (N). Таким образом, количество партий

$$O = \frac{1}{2}\left(N^2 - N\right) = \frac{1}{2}N\left(N-1\right) = \frac{11}{2}N_9\left(11N_9 - 1\right).$$

Обозначим количество набранных девятиклассниками очков O_9. Так как каждая партия даёт всем участникам в сумме 1 очко, то общее количество очков, заработанное всеми участниками турнира, равно количеству партий. По условию общее количество заработанных очков

$$O = O_9 + \frac{9}{2}O_9 = \frac{11}{2}O_9.$$

Так как число партий натуральное, а 11 нечётное, то O_9 должно быть натуральным чётным числом.

В результате, получаем равенство:

$$\frac{11}{2}O_9 = \frac{11}{2}N_9\left(11N_9 - 1\right) \Rightarrow O_9 = N_9\left(11N_9 - 1\right) \Rightarrow 11N_9^2 - N_9 - O_9 = 0.$$

Решим полученное уравнение относительно N_9:

$$\left(N_9\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 11 \cdot O_9}}{22}$$

Во-первых, отрицательный знак радикала приведёт к отрицательному корню, и его нужно отбросить. Во-вторых, квадратный корень должен извлекаться нацело. Вооружимся калькулятором и займёмся перебором:

$$O_9=2,\quad \sqrt{1+4\cdot 11\cdot 2}=\sqrt{89}\text{, не подходит.}$$

$$O_9=4,\quad \sqrt{1+4\cdot 11\cdot 4}=\sqrt{177}\text{, не подходит.}$$

$$O_9=6,\quad \sqrt{1+4\cdot 11\cdot 6}=\sqrt{265}\text{, не подходит.}$$

$$O_9=8,\quad \sqrt{1+4\cdot 11\cdot 8}=\sqrt{353}\text{, не подходит.}$$

$$O_9=10,\quad \sqrt{1+4\cdot 11\cdot 10}=\sqrt{441}=21\text{, подходит.}$$

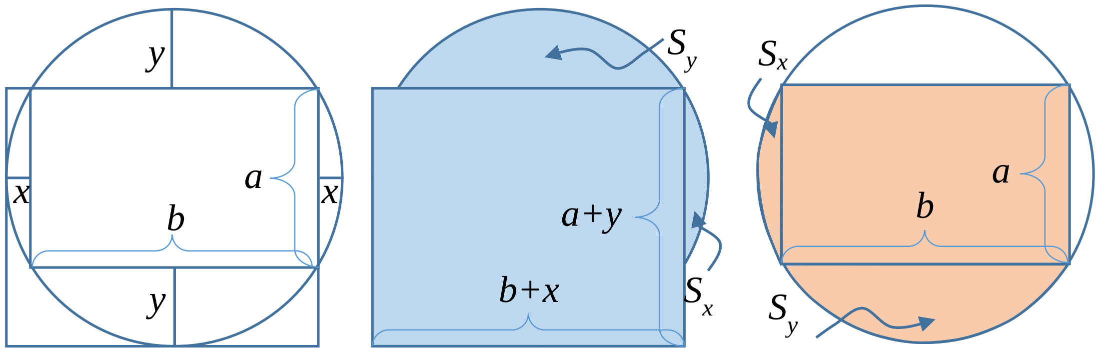
$$N_9=\frac{1+21}{22}=1;\ N=11.$$

Итак, получен ответ задачи: $O_9=10$, $N=11$. Но единственный ли он?

Возможен другой способ рассуждений, который даст единственный ответ. Вернёмся к равенству $O_9=N_9(11N_9-1)$. Вспомним, что $11N_9=N$ — количество участников турнира. Тогда $N-1=11N_9-1$ — это количество партий, сыгранных каждым участником, в том числе и девятиклассником. Тогда $N_9(11N_9-1)$ равно количеству партий, сыгранных всеми девятиклассниками. Одновременно это количество очков O_9, набранных всеми девятиклассниками. Значит, в каждой партии, в которой участвовал девятиклассник, он побеждал. Если в турнире было больше одного девятиклассника, то возникает противоречие: в партии, где они играли против друг друга, оба должны выиграть. Значит среди участников турнира один девятиклассник. Следовательно, $O_9=1\cdot(11\cdot 1-1)=10$; $N=11\cdot 1=11$

<u>Математика №2</u>

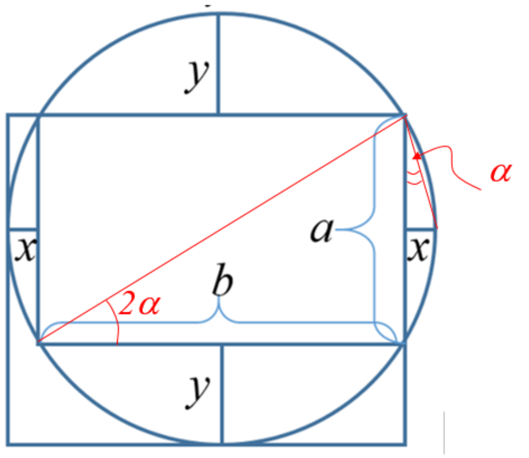
Дано: x=1, a=10



Из рисунков видно, что искомая площадь равна разности между синей площадью (на среднем рисунке) и красной площадью (на правом рисунке), то есть,

$$S=(a+y)(b+x)+S_x+S_y-(ab+S_x+S_y)=(a+y)(b+x)-ab=$$
$$=ax+by+xy$$

Таким образом, необходимо найти b и y.



Указанные на рисунке углы соотносятся так, потому что их вершины лежат на окружности, и один из них опирается на дугу этой окружности, в два раза меньшую, чем другой. Из рисунка видно, что

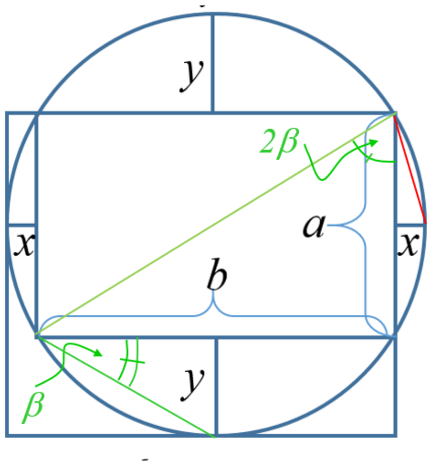
$$tg\alpha = \frac{2x}{a}$$

По формуле тангенса двойного угла

$$tg(2\alpha) = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{4x}{a\left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)} = \frac{4xa}{a^2 - 4x^2}.$$

С другой стороны,

$$tg(2\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{tg(2\alpha)} = \frac{a^2 - 4x^2}{4x} = \frac{100 - 4}{4} = 24.$$



Аналогично тому, как было в случае a,x

$$tg\beta = \frac{2y}{b} \Rightarrow y = \frac{b \cdot tg\beta}{2}$$

Из рисунка видно, что

$$tg(2\beta) = \frac{b}{a}.$$

По формуле тангенса двойного угла

$$\frac{b}{a}=\frac{2\cdot tg\beta}{1-tg^2\beta}\Rightarrow\ b-b\cdot tg^2\beta=2a\cdot tg\beta\ \Rightarrow b\cdot tg^2\beta+2a\cdot tg\beta-b=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\beta=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{-10+26}{24}=\frac{2}{3}.$$

Значит, $y=\frac{b}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{b}{3}=8$

Искомая площадь:

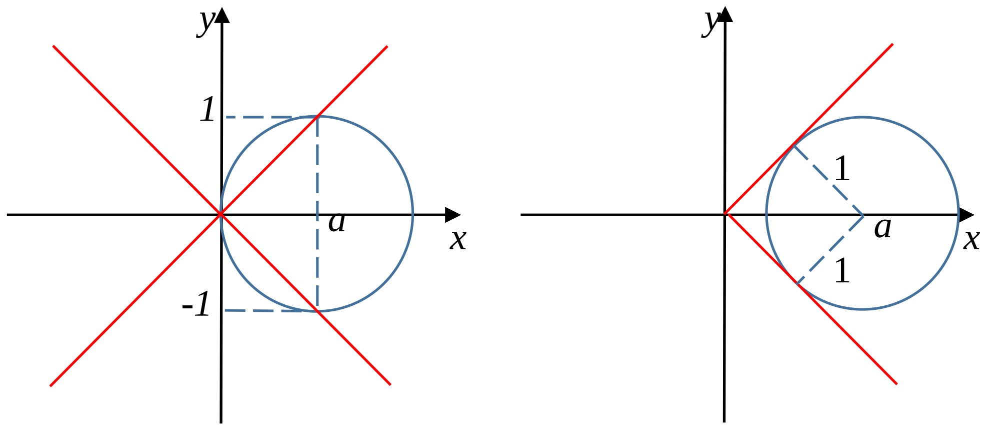
$$S=ax+by+xy=10+24\cdot 8+8=210$$

Математика №3

Первое уравнение системы приводится к виду:

$$x^2-y^2=0\ \Leftrightarrow\ x^2=y^2\ \Leftrightarrow\ |x|=|y|.$$

Это соотношение описывает две взаимно перпендикулярные прямые, идущие под углами $\pm 45°$ к осям и проходящие через начало координат. Второе уравнение описывает окружность единичного радиуса с центром в точке $(a,0)$. Решение системы описывает точки пересечения или касания окружности и прямых. На левом рисунке представлена единственная ситуация трёх решений, на правом — двух для $a>0$.



На левом рисунке a является стороной квадрата, сторона которого равна 1. Значит, три решения системы будут при $a=1$. На правом рисунке a является диагональю квадрата со стороной 1. Значит, два решения будут при $a=\sqrt{2}$. Очевидно, что для случая $a<0$ три решения будут при $a=-1$, а два — при $a=-\sqrt{2}$.

Подведём итог. У системы будут три решения при $a=\pm 1$, а два решения при $a=\pm\sqrt{2}$.

Русский язык №1

Определите, в каких из приведенных ниже слов правильно поставлено ударение.

1) апокАлипсис	11) искрА
2) благовЕст	12) крапИва
3) авизО	13) баловАть
4) ворожеЯ	14) рододЕндрон
5) граффИти	15) красивЕе
6) дешевизнА	16) завИдно
7) дремОта	17) тортЫ
8) клЕшня	18) блокирОванный
9) верхОвенство	19) перезвОнит
10) срЕдства	20) обеспЕчение

Ответ: 1, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 14, 16, 20.

<u>Русский язык №2</u>

Подберите к следующим словам синонимы.

Аббревиатура, афера, вето, интеграция, контракт, конкурент, конфиденциальный, легитимность, субмарина, электорат.

Аббревиатура – сокращение, афера – мошенничество, вето – запрет, интеграция – объединение, контракт – договор, конкурент – соперник, конфиденциальный – секретный, доверительный, легитимность – законность, субмарина – подводная лодка, электорат – избиратели

<u>Русский язык №3</u>

Замените следующие предложения пословицами и поговорками.

1) Он просто не даёт мне говорить, перебивает.
2) И одно слово может навсегда поссорить.
3) Говори осторожнее, так и до драки можно дойти.
4) За неосторожное слово можно и пострадать.
5) Слово может принести боль.
6) Иногда лучше промолчать.
7) Не всегда тот, кто красиво говорит, хорошо дело делает (работает).
8) Если ты слов не понимаешь, можешь понести и наказание.
9) Если пообещал что-нибудь, выполняй обещанное.
10) Он всегда найдёт, что и как ответить.
11) Оценивают работу не по рассказу о ней, а по результату.
12) Сказанное невозможно порой поправить.
13) Каждому приятно слышать добрые, ласковые слова.
14) От планов до их воплощения порой далеко.

Ответы:

1) Ты ему слово, а он тебе десять.
2) От одного слова да навек ссора.
3) Худое слово доведёт до дела.
4) За худые слова слетит голова.
5) Бритва скребёт, а слово режет.
6) Сказанное слово – серебряное, а несказанное – золотое.
7) Кто словом скор, тот в деле не спор.
8) Кого слова не берут, с того шкуру дерут.
9) Не дав слово, крепись, а дав слово, держись.
10) Он за словом в карман не полезет.
11) Не по словам судят, а по делам.
12) Слово не воробей, вылетит – не поймаешь.
13) Ласковое слово, что вешний день.
14) От слова до дела не близко.

Русский язык №4

Выберите правильные формы родительного падежа множественного числа следующих слов:

1) горожане – а) горожанов, б) горожан
2) осетины – а) осетинов, б) осетин
3) брелоки – а) брелоков, б) брелков
4) помидоры – а) помидоров, б) помидор
5) туфли – а) туфель, б) туфлей
6) плечи – а) плечей, б) плеч;
7) раздумья – а) раздумьев, б) раздумий
8) дупла - а) дупел, б) дупл;
9) гнездовья – а) гнездовьев б) гнездовий
10) кушанья – а) кушаньев, б) кушаний.

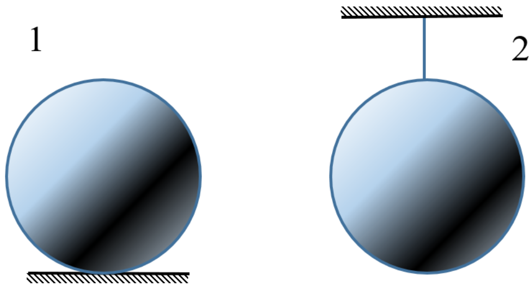
Ответы: 1б, 2б, 3а, 4а, 5а, 6б, 7б, 8а, 9б, 10б.

Русский язык №5

Что общего в словах квадрат, тетрадь, квартал, квартет, четверть?

Ответы: Все происходят от корней со значением «четыре»: русского, латинского – quartus – четвертый, quadrilateral – четырёхугольный, греческого –– tetra – четыре.

Физика №1



При нагревании железный шарик расширяется. Если шарик закреплён в своей нижней точке (левый, 1), то его центр масс в результате расширения поднимается, а значит, увеличивается его механическая энергия за счёт увеличения потенциальной в поле тяжести Земли. Если шарик закреплён в верхней точке (правый, 2), то его центр масс в результате расширения опускается, и, следовательно, его механическая энергия уменьшается. Учтём, что при быстром нагреве шарики не успевают отдать сколько-нибудь тепла окружению.

Значит, часть тепла, поглощаемого шариком 1, идёт не на его нагрев, а на увеличение его механической энергии. В результате, он нагреется до меньшей температуры, чем была бы при неподвижном центре масс. У шарика 2 механическая энергия, пропадая из-за опускания центра масс, превращается в дополнительное тепло, полученное шариком. В результате, он нагреется до температуры, большей, чем была бы при неподвижном центре масс.

Вывод: правый шарик нагреется больше.

Физика №2

Применим формулу коэффициента линейного расширения железа к радиусу шарика R.

$$\alpha = \frac{1}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta R}{R} \Rightarrow \Delta R = \alpha R \cdot \Delta T = 11{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 80 = 9 \cdot 10^{-6}\,(\text{м}) = 9\,\text{мкм},$$

так как по условию первой задачи $\Delta T = 100°C - 20°C = 80\,\text{K}$.

Физика №3

Запишем закон сохранения энергии при нагревании шариков

$$Q = \Delta U + \Delta E.$$

Здесь

Q — тепло поглощаемое шариком от внешнего источника,

ΔU — изменение внутренней энергии шарика

ΔE — изменение механической энергии шарика.

Тепло Q для обоих шариков одинаково по условию задачи №1.

Изменение внутренней энергии первого и второго шариков, соответственно,

$$\Delta U_1 = c \cdot m \cdot \Delta T_1 \qquad \Delta U_2 = c \cdot m \cdot \Delta T_2.$$

c — удельная теплоёмкость железа, m — масса шарика, $\Delta T_{1,2}$ — соответствующие изменения температур.

Изменения механической энергии шариков

$$\Delta E_{1,2} = \pm mg \cdot \Delta R,$$

потому что из-за расширения шарики меняют высоту своего центра масс на ΔR из задачи №2.

Подставим все выражения в закон сохранения энергии для каждого шарика.

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T_1 + mg \cdot \Delta R \ (1)$$

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T_2 - mg \cdot \Delta R \ (2).$$

Вычтем почленно уравнение (1) из уравнения (2).

$$0 = c \cdot m \cdot \left(\Delta T_2 - \Delta T_1\right) - 2mg \cdot \Delta R.$$

Так как изменения температур шариков происходили от одной и той же начальной температуры, то

$$\Delta T_2 - \Delta T_1 = T_2 - T_1.$$

То есть, разность изменения температур равна искомой разнице конечных температур шариков. Значит,

$$c \cdot m \cdot \left(T_2 - T_1\right) = 2mg \cdot \Delta R \ \Rightarrow \ T_2 - T_1 = \frac{2g \cdot \Delta R}{c}.$$

Подставляя полученное в предыдущей задаче значение, а также данные условия задачи, имеем:

$$T_2 - T_1 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{641} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-7} \ (\text{К})$$